

现代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著

錢 端 壮 譯

林 坚 冰 等 校

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共分八章,前四章介绍 Fourier 变换以及与其有关的 Stieltjes 积分、Mellin 变换和 Hankel 变换等,第五章介绍 Laplace 变换,最后三章介绍这些变换的主要应用、表现问题、 δ -函数和其他各种变换。适合于各高等学校数理系作为教学参考书,并可供工程技术人员、科学研究工作者参考。

现代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

原书名 Fourier 变换と Laplace 变换

原著者 [日] 河 田 龙 夫

原出版者 岩 波 书 店

译者 钱 端 壮

校者 林 坚 冰 等

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

上海市印刷五厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 10/32 字数 149,000

1961 年 11 月第 1 版 1961 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—16,000

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“现代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册,分成 A、B 两组,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成 42 种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其内容都和現代科学技术密切相关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要内容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最新发展状况,并对全书内容作一些評價,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目 录

出版说明

第1章 Fourier 变换	1
§1 記号	1
§2 Fourier 变换的定义	1
§3 几个定积分	7
§4 Fourier 积分定理	12
§5 反演公式, 唯一性	16
§6 結合函数	19
§7 Dirichlet 型积分	22
§8 收敛定理	27
§9 漸近公式	33
§10 总和定理	36
§11 反演公式及 (G, α) 总和法	39
§12 平均收敛	42
第2章 L_2 的 Fourier 变换	45
§13 L_2 的 Fourier 变换	45
§14 L_2 的 Fourier 变换的反演公式	50
第3章 Fourier-Stieltjes 积分	54
§15 单調函数	54
§16 Fourier-Stieltjes 积分	59
§17 Fourier-Stieltjes 变换的反演公式	62
§18 Parseval 等式	66
§19 单調函数列的收敛	67
第4章 Mellin 变换与 Hankel 变换	73
§20 Mellin 变换	73
§21 Hankel 变换	76
§22 Hankel 变换与多变数函数的 Fourier 变换	81
第5章 Laplace 变换	86

§ 23	Laplace 变换	86
§ 24	收敛坐标	89
§ 25	Laplace 变换的正則性	96
§ 26	Laplace-Stieltjes 变换的反演公式	98
§ 27	結合函数的 Laplace-Stieltjes 变换	101
§ 28	Laplace 变换的例题	108
第 6 章	Fourier 变换和 Laplace 变换的性质和几个应用	113
§ 29	导函数与 Fourier 变换	113
§ 30	有限 Fourier 变换的漸近級数	115
§ 31	函数变换和 Fourier 积分及 Laplace 积分	121
§ 32	Laplace 方法	125
§ 33	駐点的方法	127
§ 34	定积分	130
§ 35	数值积分	134
第 7 章	表現問題与調和分析	139
§ 36	使用 Fourier 积分的表現	139
§ 37	使用 Fourier-Stieltjes 积分的表現	145
§ 38	一般調和分析	151
第 8 章	結合函数及各种变换	155
§ 39	符号解法与結合函数	155
§ 40	双边 Laplace 变换	158
§ 41	无穷乘积	160
§ 42	Laguerre-Pólya 函数族	163
§ 43	反演公式	170
§ 44	Laplace 变换的反演公式	173
§ 45	Weierstrass 变换	176
§ 46	Stieltjes 变换	178
§ 47	Stieltjes 变换与結合函数	181
§ 48	Meijer 变换	185
校后記		188

第1章 Fourier 变换

§1 記 号

区間 $a < x < b$ 記作 (a, b) , $a \leq x \leq b$ 記作 $[a, b]$. 同样把 $a < x \leq b$, $a \leq x < b$ 分別記作 $(a, b]$, $[a, b)$. $-\infty < x < +\infty$ 記作 $(-\infty, +\infty)$. 滿足下列条件

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

的所有函数 $f(x)$ 的全体記作 $L_p(a, b)$. $f(x)$ 是具有复数值的函数。

在沒有特別指出所考虑的区間的必要, 以及沒有誤解的顧慮时, 也简单地用 L_p 来表示。

如果 $f(x)$ 是 (a, ∞) 中任意的有限区間內属于 L_1 的函数, 并且极限值

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^X f(x) dx$$

存在的时候, 就把极限值記作

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的意义就是 $\lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ X' \rightarrow -\infty}} \int_{X'}^X f(x) dx$. 同样地 $\int_a^b f(x) dx$ 的

意义就是 $\lim_{A \rightarrow a} \int_A^b f(x) dx$.

§2 Fourier 变换的定义

設 $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, 就是說

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

这时

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx \quad (2.1)$$

叫做 $f(x)$ 的 Fourier 变换。

定理 2.1 $F(t)$ 在区间 $-\infty < t < +\infty$ 内有界, 并且一致连续。

证明 由于 $|F(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, 所以很明显它是有界的。现在对任意的 $\varepsilon > 0$, 取这样的 A , 使得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > A} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

当 $|t_1 - t_2| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right) < \frac{\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} A}$ ① 时, 由于

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > A} |e^{it_1 x} - e^{it_2 x}| \cdot |f(x)| dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} |e^{it_1 x} - e^{it_2 x}| |f(x)| dx, \end{aligned}$$

又由于 $|e^{i(t_1 - t_2)x} - 1| \leq |t_1 - t_2| |x|$, 所以

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x| > A} |f(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \cdot |t_1 - t_2| \int_{-A}^{+A} |f(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \cdot |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

如果 $f(x) \in L_1(0, \infty)$ 的时候, 就分别地把

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos xt dx, \quad (2.2)$$

① 原文誤为 $|t_1 - t_2| < \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} A} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$, — 譯者注

$$G(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin xt \, dt \quad (2.3)$$

叫做 $f(x)$ 的余弦变换以及 $f(x)$ 的正弦变换。它们也是有界, 并且一致连续的。

此外, 如果 $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, 并且是偶函数, 那么

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ixt} f(x) \, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-ixt} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ixt} f(x) \, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{ixt} f(x) \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xt f(x) \, dx. \end{aligned}$$

这就是说, 它的 Fourier 变换和它的余弦变换相等。同样, 如果 $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, 而且是奇函数, 那么, $f(x)$ 的 Fourier 变换等于区间 $(0, \infty)$ 中的正弦变换。

定理 2.2 (Riemann-Lebesgue) (i) 如果 $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, 则

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixt} \, dx = 0. \quad (2.4)$$

(ii) 一般, 如果 $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$, $K(x)$ 为有界函数, 并且当 $(A \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty)$ 时, 有

$$\int_0^A K(x) \, dx = o(A), \quad \int_{-B}^0 K(x) \, dx = o(B),$$

则

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(tx) \, dx = 0. \quad (2.5)$$

证明 现在证明 (ii)。事实上,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(tx) \, dx = \int_0^{\infty} f(x) K(tx) \, dx + \int_{-\infty}^0 f(x) K(tx) \, dx,$$

所以只需証明右边各項当 $t \rightarrow \infty$ 时的极限值为零, 就是証明

$$\int_0^{\infty} f(x) K(tx) dx \rightarrow 0 \quad (|t| \rightarrow \infty) \quad (2.6)$$

即可。現在先假設 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 中等于定数 c , 而对其他的 x 則等于零, 这样, 就有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) K(tx) dx &= c \int_{\alpha}^{\beta} K(tx) dx = \frac{c}{t} \int_{\alpha t}^{\beta t} K(u) du \\ &= \frac{c}{t} \int_0^{\beta t} K(u) du - \frac{c}{t} \int_0^{\alpha t} K(u) du \\ &= o(1) \quad (|t| \rightarrow \infty). \quad (\text{根据假設}). \end{aligned}$$

其次, 設 $f_i(x)$ 在 $[\alpha_i, \beta_i]$ 的各區間中分別等于定数 c_i , 而对其他的 x 等于零。这里 $[\alpha_i, \beta_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$) 是都在區間 $(0, \infty)$ 中但没有公共点的區間。这样, 公式(2.6)对于 $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$ 也是成立的。对于一般的 $f(x) \in L_1(0, \infty)$, 取形如 $\sum c_i f_i(x)$ 的函数 $g(x)$, 使得

$$\int_0^{\infty} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon,$$

ε 是任意給定的正数。所以有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} f(x) K(tx) dx \right| &\leq \left| \int_0^{\infty} \{f(x) - g(x)\} K(tx) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_0^{\infty} K(tx) g(x) dx \right| \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

因为 $K(x)$ 有界, 所以有定数 M , 使得 $|K(x)| \leq M$, 而有

$$|I_1| \leq M \int_0^{\infty} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon M.$$

另外, 由于上面証实的理由, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g(x) K(tx) dx = 0.$$

所以如果 T 是相当大的数, 当 $|t| > T$ 时, 就能使 $|I_2| < \varepsilon$,

因此

$$\left| \int_0^{\infty} f(x) K(tx) dx \right| < \varepsilon M + \varepsilon = (M+1)\varepsilon,$$

而(ii)証毕。(i)就是(ii)当 $K(x) = e^{itx}$ 时的特殊情况。 証毕

注意 当 a, b 是有限的数, $f(x) \in L_1(a, b)$ 时, 有

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{-itx} dx = 0.$$

这是定理 2.2 的特殊情况。因为可以令 $f(x) = 0$ ($-\infty < x < a, b < x < \infty$), 而把 $f(x)$ 当作定义在 $(-\infty, \infty)$ 内, 于是 $f \in L_1(-\infty, \infty)$ 。

定理 2.3 設对于任意的有限区間 (a, b) , $f(x)$ 属于 $L_1(a, b)$, 并且在 $x > A, x < -B$ 内, $f(x)$ 分別单調地趋于零 ($|x| \rightarrow \infty$); 于是, 若 $t \neq 0$, 則积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

存在。

証明 現在証明 $\int_0^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$ 存在。我們先証明下面这个事实, 即对于已給的 ε , 如果 A 相当大的話, 对于任意的滿足不等式 $X' > X \geq A$ 的 X' 与 X ,

$$\left| \int_X^{X'} f(x) \sin tx dx \right| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

因为 $f(x)$ 当 $x \geq A$ 时单調减少, 所以可設

$$0 < |f(x)| \leq \frac{\varepsilon t}{2}.$$

根据积分学的第二中值定理, 有

$$\begin{aligned} \int_X^{X'} f(x) \sin tx dx &= f(X) \int_X^{\xi} \sin tx dx \\ &= f(X) \frac{\cos tX - \cos t\xi}{t}. \end{aligned}$$

所以
$$\left| \int_X^{X'} f(x) \sin tx dx \right| \leq \frac{2|f(X)|}{t} < \varepsilon,$$

这样就证明了

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin tx \, dx$$

是存在的。同样地能够证明

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos tx \, dx$$

是存在的。于是

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \quad (t \neq 0)$$

是存在的。完全同样能够证明

$$\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-itx} dx$$

也是存在的。

証毕

注意 用完全同样的証法,能够得到下列的事实。設

$$f(x) = g(x) \sin(px + q), \quad p, q \text{ 均为常数,}$$

$g(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时单调地收敛于零。对于这样的 $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx \quad (t \neq p)$$

存在。

定理 2.4 設 $f(x) \in L_1$, $g(x) \in L_1$, 并設它們的 Fourier 变换分别是 $F(t)$ 与 $G(t)$, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx. \quad (2.8)$$

这个等式称为 **Parseval 等式**。

証明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-txu} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-txu} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) F(u) du. \end{aligned}$$

証毕

由公式(2.8)能够得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(-x)e^{-iyx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(y-x)dx. \quad (2.9)$$

事实上,对于固定的 y , 代替 $g(x)$ 考虑 $g(y-x)$, 则由

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y-x)e^{-itx}dx &= e^{-iyt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iut}du \\ &= e^{-iyt}G(-t), \end{aligned}$$

就能得到(2.9)式。

§3 几个定积分

1. 由于定理 2.3, 积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx \quad (3.1)$$

存在。[因为如果令

$$f(x)=0 \quad (x<\varepsilon), \quad f(x)=\frac{1}{x} \quad (x>\varepsilon),$$

则由定理 2.3 中积分的虚数部分, 知道积分

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$$

是存在的($t \neq 0$)。另外, 积分

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin tx}{x} dx$$

存在, 所以(3.1)存在。如 $t=0$, 则(3.1)明显地等于零]。

我們現在試求(3.1)的值。为了这个目的, 設 $k>0$, 則

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos tx dx = \frac{k}{k^2+t^2}.$$

对变数 t 由 0 到 u 积分, 就有

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx \int_0^u \cos tx dt = \tan^{-1} \frac{t}{k}, \quad k>0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ux}{x} dx = \tan^{-1} \frac{t}{k}.$$

此外,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^\infty \frac{e^{-kx}}{x} \sin ux \, dx \right| &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left| \int_A^B \frac{e^{-kx}}{x} \sin ux \, dx \right| \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-kA}}{A} \int_A^t \sin ux \, dx \right| \quad (\text{积分第二中值定理}) \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-kA}}{A} \frac{\cos u\xi - \cos uA}{u} \right| \leq \frac{2}{u} \frac{e^{-kA}}{A} \leq \frac{2}{Au}. \end{aligned}$$

所以积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{x} \sin ux \, dx$$

对于 k 一致收敛 ($0 \leq k < \infty, u$ 固定)。因此, 当 $u > 0$ 时, 有

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x} \, dx = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ux}{x} \, dx = \lim_{k \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{u}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

就是说

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}. \quad (3.2)$$

因为被积函数是偶函数, 所以

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ux}{x} \, dx = \pi \quad (u > 0). \quad (3.3)$$

同样有

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ux}{x} \, dx = -\pi \quad (u < 0).$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ux}{x} \, dx &= \pi, & u > 0; \\ &= 0, & u = 0; \\ &= -\pi, & u < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. 同样, 当 $t > 0, 0 < \mu < 1$ 时, 有

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-itz} \, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{t^\mu} e^{-i\mu \frac{\pi}{2}}. \quad (3.5)$$

这里 $\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} dx$, 上面的公式显然是由于在

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{\mu-1} e^{-itx} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(k+it)^\mu} \quad (3.6)$$

中取 $k \rightarrow 0$ 而得到的。[(3.6) 自身, 当 $k > 0$, $0 < \mu < \infty$, $-\infty < t < \infty$ 时成立]。

特别有下面的结果:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.7)$$

下面我们讨论一下当 $x \rightarrow \infty$ 时, 积分

$$J_1 = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

的样子。

令 $1-t=u$, 则

$$J_1 = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos\left(ux - x + \frac{n\pi}{2}\right) du = \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos ux du$$

$$+ \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \sin ux du.$$

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos ux du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv,$$

$$\int_x^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv = x^{-\frac{1}{2}} \int_x^\xi \cos v dv \quad (\text{第二中值定理})$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} (\sin \xi - \cos x) = O(x^{-\frac{1}{2}}),$$

因此有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos ux du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

由(3.7)式,

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \sin ux \, du = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

因此

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{ \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

下面再研究一下积分

$$J_2 = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt.$$

把 J_2 写成

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \left\{ (1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}} \right\} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt \\ &= J_{21} + J_{22}. \end{aligned}$$

令 $(1-t)^{-\frac{1}{2}} \{(1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\} = \varphi(t)$, 则

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2} \sqrt{1+t} (\sqrt{2} + \sqrt{1+t})},$$

并且立刻晓得

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}, \quad \int_0^1 |\varphi'(t)| \, dt < \infty.$$

于是由分部积分法, 有

$$\begin{aligned} J_{22} &= \left[\varphi(t) \frac{\sin\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right)}{x} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 \varphi'(t) \sin\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt \\ &= O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x} \int_0^1 |\varphi'(t)| \, dt\right) = O\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

对于 J_{21} , 利用(3.8), 有

$$J_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.9)$$

现在如果令

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos xt \, dt,$$

则

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.10)$$

3. 现在研究一下 e^{-z^2} 的 Fourier 变换。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (3.11)$$

是大家熟知的公式。由这个公式就有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda > 0. \quad (3.12)$$

设 z 是复变数, 而来考虑 e^{-z^2} , 它是到处正则的函数。如果沿着图 3.1 中的 $ABCD$ 把 e^{-z^2} 积分, 则积分的结果等于零。由于 A, B, C, D 各点分别是 $-T, T, T+it, -T+it$, 所以

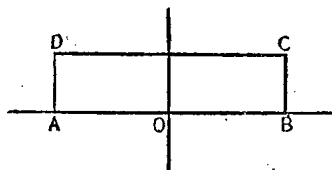


图 3.1

$$\int_{-T}^T e^{-z^2} dz + \int_T^{T+it} e^{-z^2} dz + \int_{T+it}^{-T+it} e^{-z^2} dz + \int_{-T+it}^{-T} e^{-z^2} dz = 0. \quad (3.13)$$

把 t 固定住, 则

$$\left| \int_T^{T+it} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^t e^{-(T+iu)^2} du \right| \leq e^{-T^2} \int_0^t e^{u^2} du \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty).$$

同样有

$$\int_{-T+it}^{-T} e^{-z^2} dz \rightarrow 0.$$

因此当 $T \rightarrow \infty$ 时, 根据(3.13), 有

$$\int_{-\infty+it}^{\infty+it} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

由于方程的右边是

$$2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

的关系, 整个的式子就化成

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2itx} dx = \sqrt{\pi} e^{-t^2}.$$

把公式中的 $2t$ 写成 t , 就得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t^2/4}, \quad (3.14)$$

由此能得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-t^2/4\lambda}. \quad (3.15)$$

§4 Fourier 积分定理

定理 4.1 設 $f(u)$ 在 $u=x$ 的近傍是有界变分函数, 并且在任意有限区间可积. 另外还满足下面两个条件中的一个:

1° $f(u)/u \in L_1(A, \infty)$, 并且 $\in L_1(-\infty, -A)$, $A > 0$.

2° $f(u)/u$ 当 $u \rightarrow +\infty$ 及 $u \rightarrow -\infty$ 时, 单调收敛于零.

則

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (4.1)$$

如果 2° 满足的时候, $\int_{-\infty}^{\infty}$ 意味着 $\int_{-\infty}^{\infty}$. 这个公式叫做 Fourier 单积分定理。

积分

$$D(x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi$$

叫做 Dirichlet 积分。

证明 假设满足的是条件 1°。考虑

$$D(x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^0 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{f(x+\xi) + f(x-\xi)\} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi.$$

根据 (3.2) 有

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi = 1, \quad (4.2)$$

令 $\varphi(\xi) = f(x+\xi) + f(x-\xi)$, 则

$$\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(+0) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi.$$

假定 $\delta > 0$, 则

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi = \int_{\lambda \delta}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty). \quad (4.3)$$

现在如果固定 x , 由于

$$\frac{f(x+\xi)}{\xi}, \quad \frac{f(x-\xi)}{\xi}$$

都属于 $L_1(\delta, \infty)$, 所以 $\varphi(\xi)/\xi \in L_1(\delta, \infty)$, 于是根据定理 2.1, 有

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \sin \lambda \xi d\xi \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty). \quad (4.4)$$

再令

$$\begin{aligned} D(x, \lambda) &= \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(+0) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{\varphi(\xi) - \varphi(+0)\} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \varphi(+0) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{\varphi(\xi) - \varphi(+0)\} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi + \eta(\lambda, \delta). \end{aligned}$$

因为 $\varphi(\xi) - \varphi(+0)$ 在 $\xi=0$ 的近傍是有界变分函数, 所以可以假

設它是單調增加的。並且可假定 $\varphi(\xi) - \varphi(+0) \rightarrow 0 (\xi \rightarrow 0)$ ，現在對任意給定的 ε ，取相當小的 δ ，使得

$$|\varphi(\xi) - \varphi(+0)| < \varepsilon, \quad 0 \leq \xi \leq \delta.$$

對於這樣的 δ ，當 λ_0 相當大時，能夠使

$$|\eta(\lambda, \delta)| < \varepsilon, \quad \lambda \geq \lambda_0. \quad (4.5)$$

証明見(4.4)。

另外，

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \{\varphi(\xi) - \varphi(+0)\} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \{\varphi(\delta) - \varphi(+0)\} \int_0^\delta \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \left| \int_{b\lambda}^{\delta\lambda} \frac{\sin v}{v} dv \right|. \end{aligned}$$

但是因為

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^1 \frac{\sin v}{v} dv \right| < \int_a^1 dv < 1 \quad (a < 1), \\ & \left| \int_1^\beta \frac{\sin v}{v} dv \right| = \left| \int_1^\gamma \sin v dv \right| \quad (\text{第二中值定理}) \\ &= |\cos \gamma - \cos 1| \leq 2 \quad (\beta > 1), \end{aligned}$$

所以

$$\left| \int_A^B \frac{\sin v}{v} dv \right| < C, \quad (4.6)$$

C 是與 A, B 無關的常數。於是

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \{\varphi(\xi) - \varphi(+0)\} \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \right| \leq \frac{C\varepsilon}{\pi}.$$

由這個公式及(4.5)就証明了(4.1)。

如果滿足的是條件 2°，證明的方法完全一樣，僅是(4.4)式的成立可以用不同的方法導出。設 A 相當大， $B > A$ ；因為 $f(u)/u$ 在 (A, B) 中單調減少，根據積分第二中值定理，有 C 滿足 $A < C < B$ ，並且

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{f(x+\xi)}{\xi} \sin \lambda \xi d\xi &= \int_A^B \frac{f(x+\xi)}{x+\xi} \cdot \frac{x+\xi}{\xi} \sin \lambda \xi d\xi \\
&= \frac{f(x+A)}{x+A} \int_A^C \frac{x+\xi}{\xi} \sin \lambda \xi d\xi \\
&= \frac{f(x+A)}{x+A} x \int_A^C \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi + \frac{f(x+A)}{x+A} \int_A^C \sin \lambda \xi d\xi \\
&= \frac{f(x+A)}{x+A} x \int_{A\lambda}^{C\lambda} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi + \frac{f(x+A)}{x+A} \left(\frac{\cos C}{\lambda} - \frac{\cos A}{\lambda} \right). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

等号的右边当 $A, B \rightarrow \infty$ 时收敛于零, 所以

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(x+\xi)}{\xi} \sin \lambda \xi d\xi$$

存在, 并且由于(4.7),

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{+\infty} \frac{f(x+\xi)}{\xi} \sin \lambda \xi d\xi = 0.$$

同样有

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{-\infty} f(x-\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi = 0.$$

又由定理 2.1 得到

$$\int_0^A \varphi(\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\xi} d\xi \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

从而证明了(4.4)。

証毕

由定理(4.1)直接可以导出下面的定理。

定理 4.2 若 $f(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 并且在 $u=x$ 的近傍是有界变分函数, 则

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos t(u-x) du. \quad (4.8)$$

这叫做 **Fourier 重积分定理**。

$$\begin{aligned}
\text{证明} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^A dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos t(u-x) du \\
= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_0^A \cos t(u-x) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin A(u-x)}{u-x} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi) \frac{\sin A\xi}{\xi} d\xi.
 \end{aligned}$$

当 $A \rightarrow \infty$ 时, 根据定理 4.1, 方程的右边收敛于

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}. \quad \text{証毕}$$

§5 反演公式, 唯一性

设 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 那么把 $f(x)$ 用 $F(t)$ 表达的公式叫做反演公式。

定理 5.1 设 $f(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 并且在 $u=x$ 的近傍是有界变分函数, 又设 $f(u)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 则

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{ixt} F(t) dt. \quad (5.1)$$

证明 根据前一节中定理 4.2, 有

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{ixt} F(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{ixt} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut} du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-T}^T e^{i(x-u)t} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i(x-u)T} - e^{-i(x-u)T}}{2i(x-u)} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin T(x-u)}{x-u} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi) \frac{\sin T\xi}{\xi} d\xi.
 \end{aligned}$$

于是根据定理 4.1, 1° [因为 $f(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 所以当然满足 1°], 就证明了我们的定理。 証毕

当 $F(t) \in L_1$ 的时候,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{ixt} dt$$

叫做 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换。

如果 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 并且在任意的有限区间内是有界变分函数, 那么几乎对所有的 x 有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T F(t) e^{ixt} dt.$$

因此由 $F(t)$ 决定唯一的 $f(x)$ (除了一个测度为零的 x 的集合)。

这个事实即使不假设 $f(x)$ 的有界变分性也能成立。

定理 5.2 如果 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 并且它的 Fourier 变换 $F(t) = 0$ ($-\infty < t < \infty$), 则 $f(x)$ 几乎对于所有的 x 都等于零。

证明 象下面这样定义 g_{ε} :

$$g_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & x > a + \varepsilon, \quad x < -a - \varepsilon, \\ \frac{a - x + \varepsilon}{\varepsilon}, & a \leq x \leq a + \varepsilon, \\ \frac{x + a + \varepsilon}{\varepsilon}, & -a - \varepsilon \leq x \leq -a. \end{cases}$$

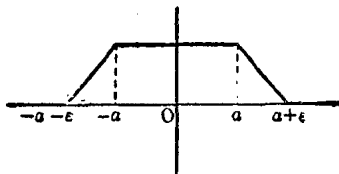


图 5.1

设 $g_{\varepsilon}(x)$ 的 Fourier 变换是 $G_{\varepsilon}(t)$. 因为 $g_{\varepsilon}(x)$ 是偶函数, 所以

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\varepsilon}(x) e^{-ixt} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_{\varepsilon}(x) \cos xt \, dx \\ &= -\frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g'_{\varepsilon}(x) \sin xt \, dx \\ &= \frac{1}{t\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\varepsilon} \sin xt \, dx \\ &= \frac{1}{t^2\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cos at - \cos(a+\varepsilon)t) \\ &= O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{5.2}$$

因此 $G_{as}(t)$ 是有界的。

又因为 $g_{as}(x)$ 是有界变分函数, 所以根据定理 5.1, 有

$$g_{as}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} G_{as}(t) dt. \quad (5.3)$$

定理 5.1 中的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 具有 $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T$ 的意义。但是由于 (5.2),

$G_{as}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, 所以可把这个积分考虑为 Lebesgue 积分。

现在 $g_{as}(x)$ 是连续函数, 所以 (5.3) 式的左边就是 $g_{as}(x)$, 因而有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g_{as}(x-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(x-u)t} G_{as}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{as}(t) e^{ixt} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G_{as}(t) e^{ixt} dt. \end{aligned} \quad (5.4)$$

[因为 $G_{as}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, $f(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 所以积分的顺序允许交换。] 于是由于 $F(t) = 0$, 由 (5.4) 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g_{as}(x-u) du = 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有

$$\int_{x-a}^{x+a} f(u) du = 0.$$

因为 a 是任意的数, 所以对于任意的 α 与 β , 有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u) du = 0,$$

就是说对于几乎所有的 x , $f(x) = 0$ ①。

证毕

① 其实下面的事实也成立: 如对所有的 x 有

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X f(x) e^{-ixt} dx = 0,$$

则对于几乎所有的 x , $f(x) = 0$ 。见 A. C. Offord: Note on the uniqueness of representation of a function by a trigonometrical integral. Journ. London Math. Soc., 11 (1936).

§6 結合函数^①

設 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 都是属于 $L_1(-\infty, \infty)$ 的函数, 令 $g(x, y) = f_1(y)f_2(x-y)$, 則

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dy |f_1(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x-y)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)| dx. \end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| dy < \infty. \quad (6.1)$$

令

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y) dy,$$

則由(6.1)就知道

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty.$$

这个 $h(x)$ 叫做 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的結合函数, 我們用記号

$$f_1 * f_2 = f_1 * f_2(x)$$

表示它。

在 $h(x)$ 的积分式中, 令 $x-y=z$, 則 $h(x)$ 就成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-z)f_2(z) dz.$$

由此可知

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1. \quad (6.2)$$

此外, 对于三个都属于 $L_1(-\infty, \infty)$ 的函数 f_1, f_2, f_3 , 不难証明

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3). \quad (6.3)$$

其次, 如果 f_1 与 f_2 的 Fourier 变换分別是 $F_1(t)$ 与 $F_2(t)$, 則

① 也称为卷积。——譯者注

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_2(x-y) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-ity} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-y)} f_2(x-y) dx \\
&= \sqrt{2\pi} F_1(t) \cdot F_2(t).
\end{aligned}$$

这样就得到了下面的定理。

定理 6.1 如果 $f_1(x), f_2(x)$ 都属于 $L_1(-\infty, \infty)$, 则 $f_1 * f_2$ 的 Fourier 变换等于 $\sqrt{2\pi} F_1(t) \cdot F_2(t)$ 。

例 1 设 $f_2(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 0, \\ 0, & 0 < x, \end{cases}$

则

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = e^x \int_x^{\infty} e^{-y} f_1(y) dy.$$

例 2 如果 $f(x) = O(1)$, 则积分

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(y) dy$$

当 $x > 0$ 时绝对收敛。 $L(x)$ 叫做 $f(x)$ 的 Laplace 变换。如果用 e^x 代替 x , 并把积分中的 y 置换成为 e^{-y} , 则有

$$\begin{aligned}
L(e^x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x - y} f(e^{-y}) e^{-y} dy, \\
L(e^x) e^x &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x - y} f(e^{-y}) e^{x-y} dy.
\end{aligned}$$

如果令 $L(e^x) e^x = h(x)$, $g_1(x) = e^{-e^x} e^x$, $g_2(x) = f(e^{-x})$, 上面的公式就变成

$$h(x) = g_1 * g_2(x). \quad (6.4)$$

例 3 设 $\Phi(x)/(1+|x|) \in L_1(0, \infty)$, $x > 0$, 令

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(y)}{x+y} dy. \quad (6.5)$$

$F(x)$ 叫做 $\Phi(x)$ 的 Stieltjes 变换。

现在令 $\Phi_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-yz} \Phi(y) dy$, $z > 0$. 由于

$$\int_4^{\infty} e^{-yz} |\Phi(y)| dy = \int_4^{\infty} y e^{-yz} |\Phi(y)| / y dy,$$

而 $ye^{-yz} \leq \frac{1}{z}e^{-1}$, 所以当 $z > 0$ 取固定值后, 积分值是有限的, 即 $\Phi_1(z)$ 存在。

于是有下列公式

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-xz} \Phi_1(z) dz \\ &= \int_0^\infty e^{-xz} dz \int_0^\infty e^{-yz} \Phi(y) dy \\ &= \int_0^\infty \Phi(y) dy \int_0^\infty e^{-(x+y)z} dz \\ &= \int_0^\infty \frac{\Phi(y)}{x+y} dy. \end{aligned} \quad (6.6)$$

由于最后一个积分绝对收敛, 所以积分 (6.6) 存在。

如果把 $F(x)$ 写成

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(y)}{x+y} dy = \int_0^\infty e^{-xz} dz \int_0^\infty e^{-yz} \Phi(y) dy. \quad (6.7)$$

令

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \frac{x}{2}, \quad g_2(x) = \Phi(e^x) e^{x/2}, \quad f(x) = F(e^x) e^{x/2},$$

则 (6.7) 式可以写成下列的形状:

$$f(x) = g_1 * g_2(x).$$

现在设 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 中连续而有界, 并且方程

$$y - \frac{dy}{dx} = \varphi(x) \quad (6.8)$$

的满足条件

$$y = o(e^x), \quad x \rightarrow \infty \quad (6.9)$$

的解存在的时候, 这样的解是唯一的。否则的话, 如果 y_1, y_2 是 (6.8) 的两个解, 并且都满足条件 (6.9), 令 $y_1 - y_2 = g(x)$, 则 $g(x) - g'(x) = 0$ 。这个方程一般解的形式为 Ae^x , 如果还要满足条件 (6.9), 那么必须是 $A = 0$ 。

下面我们指出, 如果

$$g(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 0, \\ 0, & 0 < x, \end{cases}$$

则 $g * \varphi(x)$ 是方程 (6.8) 及 (6.9) 的唯一解。

根据假设, $\varphi(x)$ 是有界的, 所以积分

$$\int_x^\infty e^{-t} \varphi(t) dt$$

存在。于是由

$$\int_x^\infty e^{-t} \varphi(t) dt = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

得到

$$y = c^x \int_x^\infty e^{-t} \varphi(t) dt = o(e^x),$$

且

$$y' = -\varphi(x) + c^x \int_x^\infty e^{-t} \varphi(t) dt.$$

因此

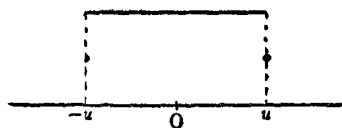
$$y - y' = \varphi(x).$$

§7 Dirichlet 型积分

設

$$D(\lambda, u) = \begin{cases} 0, & |\lambda| > u, \quad u > 0, \\ \frac{1}{2}, & \lambda = \pm u, \\ 1, & |\lambda| < u, \end{cases}$$

則 $D(\lambda, u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 而且它的 Fourier 变换是



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} D(\lambda, u) e^{-i\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-i\lambda t} d\lambda \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ut}{t}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

图 7.1

由这个公式及定理 5.1, 就得到

$$\frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin ut}{t} e^{i\lambda t} dt = \begin{cases} 0, & |\lambda| > u, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda| = u, \\ 1, & |\lambda| < u. \end{cases} \quad (7.2)$$

在上面公式中取 $\lambda = 0$, 就得到

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin ut}{t} dt = 1, \quad u > 0.$$

由于等式的左边是 u 的奇函数, 并且当 $u = 0$ 时, 它等于 0, 所以

$$A(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin ut}{t} dt = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

又因为 $\sin ut/t$ 是 t 的偶函数, 所以有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ut}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad u > 0.$$

它就是(3.2)式。现在取(7.3)的实部, 得到

$$\frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} \cos \lambda x dx = D(\lambda) = D(\lambda, 1). \quad (7.4)$$

式中的 $D(\lambda)$ 也能写作

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} e^{-i\lambda x} dx. \quad (7.5)$$

这实际就是(7.2)式。在这里令 $x = \rho(\xi - t)$, 以 t, ρ 为参变数, ξ 为自变数, 则

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^{T_1} \frac{\sin \rho(\xi - t)}{\rho(\xi - t)} e^{-i\lambda \rho(\xi - t)} \rho d\xi.$$

再令 $\lambda \rho = \sigma$, 有

$$\frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin \rho(\xi - t)}{\xi - t} e^{-i\sigma t} d\xi = e^{-i\sigma t} D\left(\frac{\sigma}{\rho}\right). \quad (7.6)$$

由(7.5)式, 就有

$$\frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} e^{-i(x-a)\lambda} dx = D(\lambda) e^{ia\lambda}. \quad (7.7)$$

分解出它的实部, 就有

$$\frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} \cos(x-a)\lambda dx = D(\lambda) \cos a\lambda. \quad (7.8)$$

把方程的两边对 λ 在区间 $(0, \lambda)$ 中积分, 就得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda d\lambda \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} \cos(x-a)\lambda dx \\ = \int_0^\lambda D(\lambda) \cos a\lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (7.9)$$

当 $\lambda = 1$ 时, 右边就是

$$\int_0^1 \cos a\lambda \, d\lambda = \frac{\sin a}{a},$$

并且对于 $0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$\int_0^\lambda \cos a\lambda \, d\lambda = \frac{\sin a\lambda}{a}.$$

現在

$$\begin{aligned} & \int_T^{T'} \frac{\sin x}{x} \cos(x-a)\lambda \, dx \\ &= \cos a\lambda \int_T^{T'} \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} \, dx + \sin a\lambda \int_T^{T'} \frac{\sin x \sin \lambda x}{x} \, dx \\ &= \frac{\cos a\lambda}{2} \left(\int_T^{T'} \frac{\sin(1+\lambda)x}{x} \, dx + \int_T^{T'} \frac{\sin(1-\lambda)x}{x} \, dx \right) \\ & \quad + \frac{\sin a\lambda}{2} \left(\int_T^{T'} \frac{\cos(1-\lambda)x}{x} \, dx - \int_T^{T'} \frac{\cos(1+\lambda)x}{x} \, dx \right). \quad (7.10) \end{aligned}$$

利用 (4.6) 我們知道括号內的积分对于 λ 是有界的 (对于 $\int_{-T'}^{-T}$ 也有同样的結果), 因此 \int_0^λ 及 $\lim_{T \rightarrow \infty}$ 的順序可以交換, 于是

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda d\lambda \int_{-T}^T \cdot dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} \, dx \int_0^\lambda \cos(x-a)\lambda \, d\lambda \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin x}{x} \frac{\sin \lambda(x-a)}{x-a} \, dx. \end{aligned}$$

由于积分中的函数是 $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, 所以积分絕對收斂, 因而可以看成是 Lebesgue 积分. 于是

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \lambda(x-a)}{x-a} \, dx = \begin{cases} \frac{\sin a}{a}, & \lambda \geq 1, \\ \frac{\sin a\lambda}{a}, & |\lambda| \leq 1, \\ -\frac{\sin a}{a}, & \lambda \leq -1. \end{cases} \quad (7.11)$$

(对于 $\lambda < 0$ 的情形, 因为被积函数是 λ 的奇函数, 所以結果显然

成立。)特别当 $a=0, \lambda=1$ 时,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = 1. \quad (7.12)$$

此外,

$$E(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \begin{cases} 1, & \lambda \geq 1, \\ \lambda, & |\lambda| \leq 1, \\ -1, & \lambda \leq -1. \end{cases} \quad (7.13)$$

我們可以重复地使用上面的方法来计算积分

$$D_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos \lambda x dx,$$

$$E_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{\sin \lambda x}{x} dx.$$

因为

$$2 \sin x \cos \lambda x = \sin(1+\lambda)x + \sin(1-\lambda)x,$$

所以

$$\begin{aligned} D_2(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos \lambda x dx \\ &= \frac{1}{2} \{E(1+\lambda) + E(1-\lambda)\} \\ &= \begin{cases} 0, & |\lambda| \geq 2, \\ 1 - \frac{|\lambda|}{2}, & |\lambda| \leq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.14)$$

另外,

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda D_2(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \int_0^\lambda \cos \lambda x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \sin \lambda x dx. \end{aligned}$$

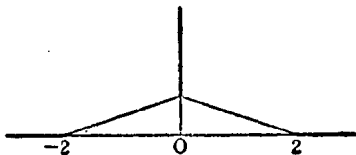


图 7.2

左边是 $\frac{1}{2} \int_0^\lambda \{E(1+\lambda) + E(1-\lambda)\} d\lambda$, 算出它的值就得到

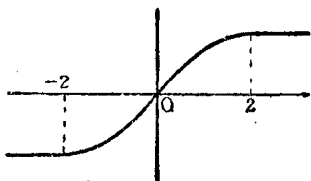


图 7.3

$$E_2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

$$= \begin{cases} 1, & \lambda \geq 2, \\ \lambda - \frac{\lambda^2}{4}, & 0 \leq \lambda \leq 2, \\ \lambda + \frac{\lambda^2}{4}, & -2 \leq \lambda \leq 0, \\ -1, & \lambda \leq -2. \end{cases} \quad (7.15)$$

同样地

$$\begin{aligned} D_3(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \cos \lambda x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{\sin(1+\lambda)x + \sin(1-\lambda)x}{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \{E_2(1+\lambda) + E_2(1-\lambda)\}, \end{aligned}$$

把它计算一下,就有

$$D_3(\lambda) = \begin{cases} 0, & |\lambda| > 3, \\ \frac{9}{8} - \frac{3\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{8}, & 1 \leq \lambda \leq 3, \\ \frac{3}{4} - \frac{\lambda^2}{4}, & -1 \leq \lambda \leq 1, \\ \frac{9}{8} + \frac{3\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{8}, & -3 \leq \lambda \leq -1. \end{cases}$$

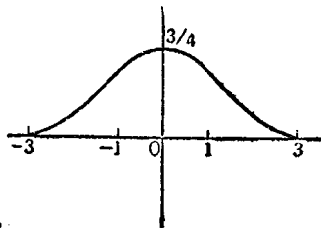


图 7.4

用同样的方法,可以顺次地计算

$$\begin{aligned} D_p(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^p \cos \lambda x dx, \\ E_p(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^p \frac{\sin \lambda x}{x} dx, \quad p \text{ 正整数}. \end{aligned}$$

如果 $|\lambda| \geq p$, 则

$$D_p(\lambda) = 0.$$

此外,由公式(7.1)可知 $D(\lambda, \rho)$ 的 Fourier 变换是

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \rho t}{t} \quad (\rho > 0),$$

因此根据定理 6.1, $D(\lambda, \rho_1) * D(\lambda, \rho_2)$ 的 Fourier 变换是

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{\sin \rho_1 t}{t} \frac{\sin \rho_2 t}{t} \quad (\rho_1, \rho_2 > 0).$$

于是根据反演公式有

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \rho_1 t}{t} \frac{\sin \rho_2 t}{t} e^{i\lambda t} dt = D(\lambda, \rho_1) * D(\lambda, \rho_2).$$

方程的右边当 $\rho_1 + \rho_2 < |\lambda|$ 时很容易明白是等于 0 的, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \rho_1 t}{t} \cdot \frac{\sin \rho_2 t}{t} e^{i\lambda t} dt = 0, \quad |\lambda| > \rho_1 + \rho_2. \quad (7.16)$$

一般, 如果作 n 个函数的結合函数, 那末

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\sin \rho_k t}{t} e^{i\lambda t} dt = 0, \quad |\lambda| > \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n$$

$$(\rho_k > 0, k=1, 2, \dots, n). \quad (7.17)$$

特别, 从上面公式可以看出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \rho t}{t} \right)^n e^{i\lambda t} dt = 0, \quad |\lambda| > n\rho > 0.$$

§8 收斂定理

根据定理 4.1, 在适当的条件下[譬如 $f(x)$ 連續], 有公式

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi) \frac{\sin n\xi}{\xi} d\xi$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) \frac{\sin u}{u} du.$$

現在我們研究一下, 在什么样的条件之下, 能成立下面的一般公式

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) K(u) du. \quad (8.1)$$

定理 8.1 設 $f(x)$ 是 x 的連續函数, 如果有

(i) $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$,

- (ii) $K(u) \in L_1(-\infty, \infty)$,
 (iii) $K(u)$: 有界,
 (iv) $K(u) = o(u^{-1}) \quad (|u| \rightarrow \infty)$;

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) K(u) du = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(u) du. \quad (8.2)$$

証明 令 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) K(u) du = \int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^0$
 $= I_1 + I_2,$

其中

$$I_1 = \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) K(u) du = n \int_0^{\infty} f(x + \xi) K(n\xi) d\xi.$$

現在对于任意給定的 $\varepsilon > 0$, 取 δ , 使得

$$|f(x + \xi) - f(x)| < \varepsilon, \quad |\xi| < \delta,$$

并令

$$I_1 = n \int_0^{\delta} + n \int_{\delta}^{\infty} = J_1 + J_2.$$

由于

$$\begin{aligned} J_1 - f(x) \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi &= n \int_0^{\delta} f(x + \xi) K(n\xi) d\xi - n f(x) \int_0^{\infty} K(n\xi) d\xi \\ &= n \int_0^{\delta} \{f(x + \xi) - f(x)\} K(n\xi) d\xi \\ &\quad + n f(x) \int_{\delta}^{\infty} K(n\xi) d\xi, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left| J_1 - f(x) \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi \right| &\leq n \int_0^{\delta} |f(x + \xi) - f(x)| |K(n\xi)| d\xi \\ &\quad + n f(x) \int_{\delta}^{\infty} |K(n\xi)| d\xi \\ &\leq \varepsilon \int_0^{\infty} |K(\xi)| d\xi + f(x) \int_{\delta n}^{\infty} |K(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |J_1 - f(x) \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi| \leq \varepsilon.$$

而 ε 是任意的, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1 = f(x) \int_0^\infty K(\xi) d\xi. \quad (8.3)$$

現在

$$|J_2| \leq n \int_0^\infty f(x+\xi) K(n\xi) d\xi,$$

据条件(iv),

$$\begin{aligned} &\leq n \int_0^\infty f(x+\xi) o\left(\frac{1}{n\xi}\right) d\xi \\ &= o\left(\int_0^\infty \frac{|f(x+\xi)|}{\xi} d\xi\right) = o(1). \end{aligned}$$

这就是說, $J_2 \rightarrow 0$, 于是据(6.2)有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = f(x) \int_0^\infty K(\xi) d\xi.$$

同样地能够証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = f(x) \int_{-\infty}^0 K(\xi) d\xi.$$

由这两个公式就証明了(8.2)式。

証毕

注意 在上面的定理中, 如果 $|f(x)| \leq M$ (有界), 則仅仅假設 $K(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 就可得(8.2)式。这是因为(8.2)式中的 \lim 可以寫到积分符号里面去。

例 1 設 $K(u) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\sin u}{u} \right)^2$.

根据(7.11)式有 $\int_{-\infty}^\infty K(u) du = 1$, 再由定理 8.1 及上面的注意, 就可以看到下面的事实。

如果 $f(x)$ 有界, 并且是属于 $L_1(-\infty, \infty)$ 的函数, 且 $f(x)$ 連續, 則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \frac{\sin^2 n(\xi-x)}{(\xi-x)^2} d\xi = f(x). \quad (8.4)$$

例 2 設 $c_p = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^p d\xi$, $p > 1$, 則在例 1 同样的假設下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p}}{c_p} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \frac{\sin^p n(\xi-x)}{(\xi-x)^p} d\xi = f(x). \quad (8.5)$$

但是值得注意的是, $\frac{\sin u}{u}$ 不滿足定理 8.1 中关于 $K(u)$ 的

条件。也就是说，定理 4.1 不是定理 8.1 的特例。要找出能够包含定理 4.1 的 $K(u)$ 的条件是个困难的问题。

定理 8.20 设 $f(x)$ 是 x 的连续函数，如果

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^p}{1+|\xi|} d\xi < \infty \quad (p > 1),$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} |K(\xi)| d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{q-1} |K(\xi)|^q d\xi < \infty,$$

并且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\xi}{n}\right) K(\xi) d\xi = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) d\xi. \quad (8.6)$$

注意 这个定理当 $p=1, q=\infty$ 时也成立，也就是说，如果 $f(x)$ 对 x 连续，并且

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|} d\xi < \infty,$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} |K(\xi)| d\xi < \infty, \quad |\xi K(\xi)| < B \quad (B \text{ 是与 } \xi \text{ 无关的常数}),$$

则公式 (8.6) 成立。

定理 8.2 的证明 如把 x 固定，并设 $\varphi(u) = f(x+u)$ ，则只需要证明下列两个公式成立即可：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) K(\xi) d\xi = \varphi(0) \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi, \quad (8.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) K(\xi) d\xi = \varphi(0) \int_{-\infty}^0 K(\xi) d\xi. \quad (8.8)$$

如果能证明 (8.7) 式，把其中的 $K(\xi)$ ， $\varphi(\xi)$ 分别换成

$$K(-\xi), \quad \varphi(-\xi)$$

来考虑，那就得到 (8.8) 式。所以只要证明 (8.7) 式。先考虑下列公式

$$I = \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) K(\xi) d\xi - \varphi(0) \int_0^{\infty} K(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left\{ \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) - \varphi(0) \right\} K(\xi) d\xi \\
&= n \int_0^\infty \{ \varphi(\xi) - \varphi(0) \} K(n\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

因为根据假设, $\varphi(\xi)$ 在 $\xi=0$ 处连续, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 可以决定 δ , 使得 $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{3A_1}$, $0 \leq \xi \leq \delta$, 其中

$$A_1 = \int_0^\infty K|\xi| d\xi.$$

现在把积分 I 分成两部分

$$I = n \int_0^\delta + n \int_\delta^\infty = I_1 + I_2. \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq n \int_0^\delta |\varphi(\xi) - \varphi(0)| K(n\xi) d\xi \\
&\leq \frac{\varepsilon n}{3A_1} \int_0^\delta |K(n\xi)| d\xi = \frac{\varepsilon}{3A_1} \int_0^\infty |K(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.10)
\end{aligned}$$

现在取这样的 n_0 , 使得

$$\left(\int_{\delta n_0}^\infty |\xi|^{q-1} |K(\xi)|^q d\xi \right)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon}{3A_2},$$

其中

$$A_2^p = \int_\delta^\infty \frac{|\varphi(\xi)|^p}{\xi} d\xi.$$

再取满足条件

$$|\varphi(0)| \int_{\delta, n_1}^\infty |K(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{3}$$

的 n_1 . 令 $N = \max(n_0, n_1)$, 当 $n > N$ 时, 设

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| n \int_\delta^\infty \varphi(\xi) K(n\xi) d\xi + n\varphi(0) \int_\delta^\infty K(n\xi) d\xi \right| \\
&\leq n \int_\delta^\infty |\varphi(\xi)| |K(n\xi)| d\xi + |\varphi(0)| \int_{\delta n}^\infty |K(\xi)| d\xi \\
&= I_{2,1} + I_{2,2}.
\end{aligned}$$

应用 Hölder 不等式于 $I_{2,1}$, 就有

$$I_{2,1} \leq \left(\int_{\delta}^{\infty} \frac{|\varphi(\xi)|^p}{\xi} d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta}^{\infty} n^q |\xi|^{q-1} |K(n\xi)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A_2 \cdot \left(\int_{\delta,1}^{\infty} |\xi|^{q-1} |K(\xi)|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $I_{2,2} < \frac{\varepsilon}{3}$, 所以把这两个结果连同 (8.10) 代入 (8.9) 式, 就得到

$$|I| < \varepsilon. \quad \text{証毕}$$

如果要证明注意中所述的情况, 那么只要证明上面的 $I_{2,1}$ 是零即可。

因为我们能够确定这样的 b , 使得

$$\int_b^{\infty} \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi} d\xi < \frac{\varepsilon}{B}$$

成立, 故

$$\left| n \int_b^{\infty} \varphi(\xi) K(n\xi) d\xi \right| \leq \left| \int_b^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} n\xi K(n\xi) d\xi \right|$$

$$\leq B \int_b^{\infty} \frac{|\varphi(\xi)|}{\xi} d\xi < \varepsilon.$$

因此只需要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\delta}^b \varphi(\xi) K(n\xi) d\xi = 0, \quad 0 < \delta < b < \infty \quad (8.11)$$

就够了。因为 $\varphi(\xi)/\xi \in L(\delta, b)$, 所以存在着有界函数 $h(\xi)$, 满足

$$\int_{\delta}^b |\varphi(\xi)/\xi - h(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{B}.$$

于是

$$\left| n \int_{\delta}^b \varphi(\xi) K(n\xi) d\xi \right| = \left| n \int_{\delta}^b \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \xi K(n\xi) d\xi \right|$$

$$= \left| \int_{\delta}^b \left\{ \frac{\varphi(\xi)}{\xi} - h(\xi) \right\} n\xi K(n\xi) d\xi + \int_{\delta}^b h(\xi) n\xi K(n\xi) d\xi \right|$$

$$\leq \int_{\delta}^b \left| \frac{\varphi(\xi)}{\xi} - h(\xi) \right| |n\xi K(n\xi)| d\xi + \int_{\delta}^b |h(\xi)| |n\xi K(n\xi)| d\xi.$$

但是 $|uK(u)| < B$, $|h(\xi)| < C$, 所以

$$\begin{aligned} &\leq B \cdot \int_{\delta}^b \left| \frac{\varphi(\xi)}{\xi} - h(\xi) \right| d\xi + \frac{C}{n} \int_{\delta n}^{bn} |\xi K(\xi)| d\xi \\ &< \varepsilon + bC \int_{\delta n}^{bn} |K(\xi)| d\xi \leq \varepsilon + bC \int_{\delta n}^{\infty} |K(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

如果 n 取得相当大, 上式最后的一项可以与零任意地接近, 这样就证明了 (8.11)。

例 設

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2},$$

$f(x)$ 是連續函数, 并且

$$\frac{f(\xi)}{1+|\xi|} \in L_1,$$

則

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\delta^2}} d\xi = f(x). \quad (8.12)$$

上面这个公式, 就是在

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\xi}{n}\right) K(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) K(nu) du \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) K(n(\xi-x)) d\xi \end{aligned}$$

中把 K 写成 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, 并令 $n = \frac{1}{\delta}$ 的结果。

(8.12) 式的左边叫做 Weierstrass 的奇异积分。

§9 漸近公式

定理 9.1 設 $f(x)$ 是在 x 近傍具有 r 次連續导函数的函数, 并且

- (i) $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$,
- (ii) $uK(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, $K(u) \in L_1(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$,
- (iii) $K(u) = o(u^{-1})$ ($|u| \rightarrow \infty$),

則当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) K(u) du = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(u) du + \frac{f'(x)}{1!n} \int_{-\infty}^{\infty} u K(u) du + \cdots \\ + \frac{f^{(r)}(x)}{r! n^r} \int_{-\infty}^{\infty} u^r K(u) du + o\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (9.1)$$

证明 令

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{u}{n}\right) K(u) du - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k! n^k} \int_{-\infty}^{\infty} u^k K(u) du \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \xi) K(n\xi) d\xi - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} n \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k K(n\xi) d\xi \\ &= n \int_{|\xi| < \delta} \left\{ f(x + \xi) - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \xi^k \right\} K(n\xi) d\xi \\ &\quad + n \int_{|\xi| > \delta} f(x + \xi) K(n\xi) d\xi - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} n \int_{|\xi| > \delta} \xi^k K(n\xi) d\xi \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

根据 Taylor 定理有

$$f(x + \xi) - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \xi^k = \frac{\xi^r}{r!} \{f^{(r)}(x + \theta \cdot \xi) - f^{(r)}(x)\} \quad (9.2)$$

($\theta = \theta(\xi)$, $0 < \theta < 1$). 现在对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取这样的 δ ($\delta > 1$), 使得

$$|\xi| < \delta \text{ 时, } |f^{(r)}(x + \theta\xi) - f^{(r)}(x)| < \varepsilon.$$

I 已被分成 I_1, I_2, I_3 三个部分。把 (9.2) 代入 I_1 , 则有

$$\begin{aligned} |I_1| &< \varepsilon n \int_{|\xi| < \delta} \frac{|\xi|^r}{r!} |K(n\xi)| d\xi \leq \varepsilon n \int_{|\xi| < \delta} |K(n\xi)| d\xi \\ &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |K(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (9.3)$$

又利用条件 (iii), 得到

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq n \int_{|\xi| > \delta} \frac{|f(x + \xi)|}{\xi} |\xi K(n\xi)| d\xi \\ &= n \int_{|\xi| > \delta} \frac{|f(x + \xi)|}{\xi} o\left(\frac{1}{n\xi}\right) d\xi \\ &= o\left(\int_{|\xi| > \delta} \frac{|f(x + \xi)|}{\xi} d\xi\right) = o(1), \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq \sum_{k=0}^r \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} n \int_{|\xi| \geq \delta} |\xi|^k |K(n\xi)| d\xi \\
 &= \sum_{k=0}^r \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \frac{1}{n^k} \int_{|\xi| \geq n\delta} |\xi|^k |K(\xi)| d\xi \\
 &= \sum_{k=0}^r \frac{|f^{(k)}(x)|}{n^k k!} \cdot o(1) = o(1).
 \end{aligned}$$

于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$|I| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |K(\xi)| d\xi + o(1).$$

因为 ε 是任意的, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} I = 0$.

証毕

定理 9.1 是定理 8.1 的推广. 对于定理 8.2, 也能考虑它的推广, 这个问题的讨论此处从略^①.

特别令 $x=0$, 则在定理 9.1 的假设条件下 (令 $u/n=\xi$), 可有下面的写法:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) K(n\xi) d\xi &= \frac{f(0)}{n} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) du \\
 &\quad + \frac{f'(0)}{n^2} \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{\infty} u K(u) du \\
 &\quad + \cdots + \frac{f^{(r)}(0)}{n^{r+1}} \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} u^r K(u) du \\
 &\quad + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{9.4}
 \end{aligned}$$

例 設 $K(u) = \begin{cases} e^{-u}, & u > 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$

則

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} f(x) e^{-nx} dx &= \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n^2} f'(0) + \frac{1}{n^3} f''(0) \\
 &\quad + \cdots + \frac{1}{n^{r+1}} f^{(r)}(0) + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \tag{9.5}
 \end{aligned}$$

又如設

$$K(u) = \begin{cases} e^{-u^2}, & u > 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

① 参看青沼龙雄: Kōdai Math. Sem. Rep., 近刊。

则有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) e^{-ux} dx &= \frac{\sqrt{x}}{2n} \left\{ f(0) + \frac{1}{2!2} \frac{f''(0)}{n^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!} \frac{3}{2^3} \frac{f^{(iv)}(0)}{n^4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{(2p)! 2^p} \frac{f^{(2p)}(0)}{n^{2p}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2n} \left\{ \frac{f'(0)}{n} + \frac{1!}{3!} \frac{f'''(0)}{n^3} + \frac{2!}{5!} \frac{f^{(v)}(0)}{n^5} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{p!}{(2p+1)!} \frac{f^{(2p+1)}(0)}{n^{2p+1}} \right\} + o\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right), \end{aligned}$$

又可写成

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x}}{2n} \left\{ f(0) + \frac{1}{2!2} \frac{f''(0)}{n^2} + \frac{1}{4!} \frac{3}{2^3} \frac{f^{(iv)}(0)}{n^4} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{(2p)! 2^p} \frac{f^{(2p)}(0)}{n^{2p}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2n} \left\{ \frac{f'(0)}{n} + \frac{1!}{3!} \frac{f'''(0)}{n^3} + \frac{2!}{5!} \frac{f^{(v)}(0)}{n^5} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(p-1)!}{(2p-1)!} \frac{f^{(2p-1)}(0)}{n^{2p-1}} \right\} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)^{(9)} \quad (9.6) \end{aligned}$$

§ 10 总和定理

现在考虑比 § 9 中所讲的定理更一般的公式

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) K(x, u, \delta) du = f(x)$$

成立的条件。

定理 10.1 设当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 存在着这样的正数 α , 使得

$$K(x, u, \delta) = O\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad |x-u| \leq \delta \quad (10.1)$$

$$= O\left(\frac{\delta^\alpha}{|x-u|^{1+\alpha}}\right), \quad |x-u| \geq \delta \quad (10.2)$$

成立。此外, 有

① 用不同的方法来导出这些渐近公式的有 H. F. Willis: A formula for expanding an integral as a series, Phil. Mag., 39 (1948). 还有 C. J. Tranter: Integral transforms in Math. Phys., John Wiley, 1956.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, u, \delta) du = 1. \quad (10.3)$$

又如

$$f(x)/(1+|x|^{1+\alpha}) \in L_1(-\infty, \infty),$$

則有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, u, \delta) f(u) du = f(x). \quad (10.4)$$

但是这里假定

$$\int_{|u| \leq \delta} |f(x+u) - f(x)| du = o(\delta), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (10.5)$$

証明 根据(10.3), 事实上只需要証明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(u) - f(x)\} K(x, u, \delta) du = 0 \quad (10.6)$$

即可。令

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(u) - f(x)\} K(x, u, \delta) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x+u) - f(x)\} K(x, x+u, \delta) du \\ &= \int_{|u| \leq \delta} + \int_{|u| > \delta} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

利用(10.1)就有常数 C_1 , 使得下面的公式成立。

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{|u| \leq \delta} |f(x+u) - f(x)| |K(x, x+u, \delta)| du \\ &\leq C_1 \cdot \frac{1}{\delta} \int_{|u| \leq \delta} |f(x+u) - f(x)| du. \end{aligned}$$

于是根据(10.5), 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 整个的式子收敛于零, 这也就是说

$$I_1 \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

其次, 利用(10.2), 就得到

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{|u| > \delta} |f(x+u) - f(x)| |K(x, x+u, \delta)| du \\ &\leq C_2 \delta^\alpha \int_{|u| > \delta} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{|u|^{1+\alpha}} du, \end{aligned} \quad (10.7)$$

現在只要証明最后的式子当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 收敛于零就够了。为了这个目的, 令

$$\chi(t) = \int_0^t |f(x+u) - f(x)| dx.$$

根据(10.5)所假设的, 对于任意給定的 ε , 存在着 η , 使得

$$\chi(t) \leq \varepsilon t, \quad 0 \leq t \leq \eta.$$

$$\begin{aligned} \delta^\alpha \int_{|u|>\delta} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{|u|^{1+\alpha}} du &= \delta^\alpha \int_{\delta < |u| \leq \eta} + \delta^\alpha \int_{|u|>\eta} \\ &= I_{2,1} + I_{2,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \delta^\alpha \int_{\delta < |u| \leq \eta} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{|u|^{1+\alpha}} du \\ &= \delta^\alpha \left\{ \left[\frac{\chi(t)}{t^{\alpha+1}} \right]_\delta^\eta + \left[-\frac{\chi(t)}{|t|^{\alpha+1}} \right]_{-\eta}^{-\delta} \right\} + (\alpha+1) \delta^\alpha \int_{\delta < |t| \leq \eta} \frac{\chi(t)}{t^{\alpha+2}} dt \\ &\leq 2 \left(\varepsilon + \varepsilon (\alpha+1) \delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \right) \leq 2\varepsilon \left(1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

又因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_{2,2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\alpha \int_{|u|>\eta} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{|u|^{1+\alpha}} du = 0,$$

所以把(10.8)代入(10.7)之内, 就得到

$$I_2 \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

特别当

$$\delta = \frac{1}{\lambda}, \quad K(x, u, \delta) = \frac{\sin^2 \lambda(x-u)}{\pi \lambda (x-u)^2}$$

时, 可以取 $\alpha=1$, 就能满足定理 10.1 中的条件, 于是就有下面的定理。

定理 10.2 (i) 設 $f(x)/(1+x^2) \in L_1(-\infty, \infty)$, 并且

$$\int_0^h |f(x+u) - f(x)| dx = o(h), \quad (10.9)$$

則

$$\frac{1}{\pi \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin^2 \lambda(x-u)}{(x-u)^2} du = f(x), \quad (10.10)$$

(ii) 如果 $f(x)/(1+x^2) \in L_1(-\infty, \infty)$, 那么几乎对于所有的 x 公式(10.10)成立。

这也就是 § 8 中所讲的例 1 的情况。至于(ii), 因为(10.9)几乎对于所有的 x 成立, 所以是十分明显的。

公式(10.10)的左边叫做 $f(x)$ 的 **Fejér 积分**, $\frac{\sin^2 \lambda x}{\pi \lambda x^2}$ 叫做 **Fejér 核**。

§ 11 反演公式及 (C, α) 总和法

設 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 它的 Fourier 变换是 $F(t)$. 根据定理 5.1, 如果 $f(x)$ 在 x 的近傍有界变分, 则可以知道 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换是 $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$.

現在我們考虑沒有“ $f(x)$ 是有界变分”这个假定的情形。

一般, 如果 $\varphi(x)$ 在有限区間內是可积的函数, 且

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|u|}{\lambda}\right)^{\alpha} \varphi(u) du = I, \quad \alpha \geq 0$$

存在的话, 那么就說积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du$ 为 (C, α) 可和, 并且总和是 I , 有时写作

$$(C, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = I. \quad (11.1)$$

当 $\alpha=0$ 时, 这个定义与

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du$$

存在的意义是一样的。

定理 11.1 (i) 設 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 它的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則对于几乎所有的 x , 有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (C, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} F(t) dt = f(x), \quad \alpha > 0. \quad (11.2)$$

(ii) 在(i)的假设条件之下,对于满足条件

$$\int_0^h |f(x+u) - f(x)| du = O(h) \quad (11.3)$$

的 x , (11.2) 成立。

证明 根据定义只要证明,在(11.3)的条件之下,有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right) e^{ixt} F(t) dt \rightarrow f(x) \quad (11.4)$$

即可。

现在(11.4)的左边是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{ixt} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} f(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{it(x-u)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du 2 \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha} \cos t(x-u) dt, \end{aligned}$$

令

$$K\left(x, u, \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha} \cos t(x-u) dt,$$

则

$$\begin{aligned} K\left(x, x+u, \frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha} \cos \lambda v u dv \\ &= \frac{\alpha}{\pi u} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v u dv \quad (\text{根据分部积分法}), \end{aligned} \quad (11.5)$$

再设 $1-v=w/(\lambda|u|)$, 则

$$\begin{aligned} K\left(x, x+u, \frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{\alpha}{\pi \lambda^{\alpha} u \cdot |u|^{\alpha}} \int_0^{|\lambda|u|} \frac{\sin(\lambda u - \operatorname{sgn} u \cdot w)}{w^{1-\alpha}} dw \\ &= \frac{\alpha}{\pi \lambda^{\alpha} |u|^{\alpha+1}} \int_0^{|\lambda|u|} \frac{\sin(\lambda|u| - w)}{w^{1-\alpha}} dw. \end{aligned} \quad (11.6)$$

当 $\lambda|u| < 1$ 时, 这个积分的绝对值小于

$$\int_0^{|\lambda|u|} \frac{1}{w^{1-\alpha}} dw$$

① $\operatorname{sgn} u$ 代表 u 的符号。

的绝对值, 故有界; 又当 $\lambda|u| > 1$ 时, 有

$$\left| \int_1^\xi \frac{\sin(\xi - w)}{w^{1-\alpha}} dw \right| = \left| \int_1^{\xi'} \sin(\xi - w) dw \right| = O(1)$$

(第二中值定理)。

因此恒有

$$\int_0^{\lambda|u|} \frac{\sin(\lambda|u| - w)}{w^{1-\alpha}} dw = O(1).$$

于是由 (11.6) 有

$$K\left(x, x+u, \frac{1}{\lambda}\right) = O(\lambda^{-\alpha}|u|^{-\alpha-1}).$$

又由 (11.5) 有

$$K\left(x, x+u, \frac{1}{\lambda}\right) = O(\lambda).$$

另外,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, u, \frac{1}{\lambda}\right) du &= \int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, x+u, \frac{1}{\lambda}\right) du \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} du \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v u dv \\ &= \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi} \int_{-U}^U \frac{1}{u} du \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v u dv \\ &= \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} dv \int_{-U}^U \frac{\sin \lambda v u}{u} du. \end{aligned}$$

由于右边的积分有界, 所以

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} dv \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^U \frac{\sin \lambda v u}{u} du \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \\ &= \alpha \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} dv = 1. \end{aligned}$$

这样就满足了定理 11.1 中的 K 的一切条件, 于是定理得证。 証毕

注意 对应于定理4.2的 Fourier 重积分定理, 在(11.3)的条件下, 成立着

$$\frac{1}{x}(C, \alpha) \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos t(u-x) du = f(x) \quad \alpha > 0.$$

这里 (C, α) 的意义是

$$(C, \alpha) \int_0^{+\infty} (\cdot) dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} (\cdot) dt.$$

§ 12 平均收敛

在前节中曾讲述了一般的总和定理。在 (C, α) 的情形中, 核 $K(x, u, \delta)$ 具有 $K(x-u, \delta)$ 的形式。事实上, 很多的核只是依赖于 $x-u$, 所以本节特别研究下面形状 of 的积分

$$\chi(x, \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-u, \delta) f(u) du,$$

并且讨论一下, 在什么样的条件下 $\chi(x, \delta)$ 平均收敛于 $f(x)$ 。

定理 12.1 如果

$$(i) \quad K(u, \delta) \geq 0,$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(u, \delta) du = 1,$$

$$(iii) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|u| > y} K(u, \delta) du = 0 \quad (y > 0, \text{ 并且是固定的}),$$

那么当 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ 时,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x, \delta) - f(x)| dx = 0.$$

证明

$$\begin{aligned} \chi(x, \delta) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-u, \delta) f(u) du - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(v, \delta) f(x-v) dv - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(v, \delta) \{f(x-v) - f(x)\} dv \quad (\text{根据(ii)}). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x, \delta) - f(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(v, \delta) |f(x-v) - f(x)| dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x, \delta) dv \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-v) - f(x)| dx. \quad (12.1) \end{aligned}$$

(12.1) 式中右边的积分, 由于当任取 $\delta > 0$ 时, 根据 (ii), $K(v, \delta)$ 恒是有界的, 所以绝对收敛。于是积分的顺序可以交换。现在设

$$\varphi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-v) - f(x)| dx,$$

那么, 大家熟知, 当 $v \rightarrow 0$ 时, $\varphi(v) = o(1)$ 。于是对于任意给定的 ε , 取这样的 $\eta = \eta(\varepsilon)$, 使得

$$|\varphi(v)| < \varepsilon, \quad |v| < \eta.$$

再令

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{|v| < \eta} K(x, v) \varphi(v) dv \\ &\quad + \int_{|v| > \eta} K(x, v) \varphi(v) dv = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

则

$$|I_1| < \varepsilon \int_{|v| < \eta} K(x, v) dv \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K(x, v) dv = \varepsilon.$$

又

$$\begin{aligned} \varphi(v) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-v)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

最后的积分成为常数 C , 即 $\varphi(v)$ 是有界的, 所以当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$|I_2| \leq C \int_{|v| > \eta} K(x, v) dv \rightarrow 0 \quad (\text{根据 (iii)}).$$

于是若对上面所确定的 η 选择 δ 这样小, 使得最后的积分小于 ε , 则

$$|I| < 2\varepsilon. \quad \text{証毕}$$

特别令

$$K(x, \delta) = K\left(x, \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \lambda x}{\lambda x^2},$$

则本定理中一切假设的条件都能满足。因此如果 $f(x) \in L_1$, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin^2 \lambda(x-u)}{(x-u)^2} du - f(x) \right| dx = 0. \quad (12.2)$$

第2章 L_2 的 Fourier 变换

§ 13 L_2 的 Fourier 变换

首先证明下面的定理。

定理 13.1 设 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 则存在着属于 L_2 的函数 $F(t)$, 使得

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{-ixt} dx \right|^2 dt = 0. \quad (13.1)$$

这个函数 $F(t)$ 叫做函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换。

证明 令

$$\begin{aligned} f_a(x) &= f(x), & |x| \leq a, \\ &= 0, & |x| > a. \end{aligned}$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_a(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow \infty). \quad (13.2)$$

再令

$$F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) e^{-ixt} dx,$$

因为 $f_a(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 所以这个积分存在。

下面把一个积分计算一下。设 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2} |F_a(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) e^{-ixt} dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_a(y)} e^{iyt} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_a(y)} dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}\delta^2 t^2 + it(y-x) \right\} dt, \end{aligned}$$

根据(3.15), 最后的积分等于 $\frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\delta^2}$, 所以

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_a(y)} e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2} dy, \quad (13.3)$$

利用重积分的 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2} dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(y)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2} dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2/\delta^2} dx dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2/\delta^2} du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

这也就是说,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx.$$

在这里,如果取 $\delta \rightarrow 0$, 由于 $e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2}$ 单调地趋近于 1, 所以我们可以把 \lim 的运算用在积分符号之内,而得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx.$$

这样就证明了 $F_a(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

由 (13.3),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2 t^2} |F_a(t)|^2 dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_a(x+y)} e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2} dy \\ &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \overline{f_a(x+y)} dx \\ &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2} \varphi(y) dy. \end{aligned} \quad (13.4)$$

这里

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \overline{f_a(x+y)} dx.$$

这个函数 $\varphi(y)$, 因为它小于或等于

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_c(x+y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

所以是有界的,又因为

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x+y_1) - f_a(x+y_2)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

所以是連續的。于是根据 § 8 的例 2, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2/\delta^2} \varphi(y) dy = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx,$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 根据 (13.4) 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2 dx. \quad (13.5)$$

其次, 再把 $f_c(x)$ 换成 $f_a(x) - f_b(x)$, 由 (13.5) 式有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t) - F_b(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x) - f_b(x)|^2 dx = \int_{a < |x| < b} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

于是当 $b \rightarrow \infty$ 且 $a \rightarrow \infty$ 时, 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t) - F_b(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

因此, 存在着满足下面关系的属于 $L_2(-\infty, \infty)$ 的函数 $F(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(t) - F(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow \infty).$$

証毕

定理 13.1 中可以用 (13.1) 式, 而用下面的式子

$$\lim_{a \rightarrow \infty, b \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^a f(x) e^{-ixt} dx \right|^2 dt. \quad (13.6)$$

这可用完全同样的方法来証明。

如果在定理 13.1 証明中的 (13.5) 式內, 取 $a \rightarrow \infty$, 就得到了下面定理中情形 (i) 的証明。

定理 13.2 (i) 設 $f \in L_2(-\infty, \infty)$, 它的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則成立着

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt. \quad (13.7)$$

(ii) 設 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 它們的 Fourier 变换分別是 $F(t)$ 与 $G(t)$, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) g(t) dt, \quad (13.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} dt. \quad (13.9)$$

公式 (13.7), (13.8), (13.9) 都叫做 Parseval 等式。

令

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a g(x) e^{-itx} dx = G_a(t), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{-itx} dx = F_a(t),$$

根据假設有

$$\text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} G_a(x) = G(x), \quad \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} F_a(x) = F(x). \quad (13.10)$$

公式 (13.10) 的意义是: $G_a(x)$ 与 $F_a(x)$ 分别平均收敛于 $G(x)$ 与 $F(x)$; 也就是說, 它們分别表示着下列的关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_a(x) - G(x)|^2 dx \rightarrow 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(x) - F(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

再者这个时候, 对于任意属于 L_2 的函数 $g(x)$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_a(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx,$$

即

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_a(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} F_a(x) \cdot g(x) dx. \quad (13.11)$$

証明 由(13.11)有

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} G_a(x)dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G_a(x)dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a g(u)e^{-iux}du \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x)dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a g(u)e^{-iux}du \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-a}^a g(u)du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b f(x)e^{-iux}dx
 \end{aligned}$$

再一次的应用(13.11), 则有

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a g(u)du \text{l.i.m.}_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b f(x)e^{-iux}dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a g(u)F(u)du.
 \end{aligned}$$

因为 $g(u) \in L_2$, $F(u) \in L_2$, 所以

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(u)du.$$

这样就証明了(13.8)。

至于(13.9)可以用完全同样的方法証明。另外还可以象下面这样地利用(13.7)来証明。

因为 $f(x) + g(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t) + G(t)$, 所以根据(13.7)有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t) + G(t)|^2 dt,$$

于是有

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx + 2\Re \textcircled{1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt + 2\Re \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)}dt.
 \end{aligned}$$

① \Re 代表复数的实部, i 代表复数的虚部。——譯者注

由此就得到了

$$\Re \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \Re \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} dt. \quad (13.12)$$

此外, 因为 $f(x) + ig(x)$ 的 Fourier 变换就是 $F(t) + iG(t)$, 所以用同样的方法, 能够证明

$$i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} dt.$$

由这个公式和 (13.12), 就证明了

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} dt. \quad \text{証毕}$$

注意 如果利用这样的事实, 即 $G(x)$ 的逆 Fourier 变换是 $g(x)$ (下一节将要讨论), 则 (13.8) 与 (13.9) 实质上是完全等价的公式。此外还可以把它们写成下面的形状: 设 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 而它们的 Fourier 变换分别是 $F(t)$ 与 $G(t)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x) dx. \quad (13.13)$$

此外, 如果把 $g(y+x)$ 看成是 x 的函数, 则

$$\begin{aligned} H_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a g(y+x) e^{-itx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+y}^{a+y} g(x) e^{-it(x-y)} dx = e^{ity} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+y}^{a+y} g(x) e^{-itx} dx. \end{aligned}$$

所以注意到 (13.6), $g(x+y)$ 的 Fourier 变换就是 $e^{ity} G(t)$, 其中 $G(t)$ 是 $g(x)$ 的 Fourier 变换。这样再根据 (13.13) 就得到了下面的公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{ity} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y-x) dx. \quad (13.14)$$

§ 14 L_2 的 Fourier 变换的反演公式

当 $f \in L_1$ 的时候, 它的 Fourier 变换 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换, 仅当对 f 加上了种种的假设以后, 才能等于 $f(x)$ 。但是当 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ 的时候, $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(t)$ 的逆 Fourier 变换一定就是 $f(x)$ 本身。

定理 14.1 設 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 它的 Fourier 变换是

$$F(t) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(x) e^{-itx} dx.$$

則 $F(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, 并且

$$f(x) = \text{l.i.m.}_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b F(t) e^{itx} dt. \quad (14.1)$$

証明 关于 $F(t) \in L_2$ 这个事实已于定理 13.1 中証明过了。这样, 根据定理 13.1, $F(t)$ 具有 Fourier 变换。也就是說, 存在着函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b F(t) e^{itx} dt \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad b \rightarrow \infty.$$

現在只需要指出, 对于几乎所有的 x , 都成立着 $\varphi(x) = f(x)$ 。

首先对于任意的 ξ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \varphi(x) dx &= \int_0^\xi dx \text{l.i.m.}_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b F(t) e^{itx} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \int_{-b}^b F(t) e^{itx} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b F(t) \frac{e^{it\xi} - 1}{it} dt. \end{aligned}$$

由于 $F(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $(e^{it\xi} - 1)/(it) \in L_2(-\infty, \infty)$ ($\xi \neq 0$), 所以这个积分绝对收敛。于是

$$\int_0^\xi \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{e^{it\xi} - 1}{it} dt. \quad (14.2)$$

現在令

$$g(x) = 1, \quad \text{若 } x \text{ 在 } (0, \xi) \text{ 中};$$

$$g(x) = 0, \quad \text{对其他的 } x,$$

則

$$\int_0^\xi f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx.$$

因为 $g(x)$ 是 $L_2(-\infty, \infty)$ 中的函数, 而

$$\begin{aligned} G_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a g(x) e^{-itx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-itx} dx = \frac{e^{-it\xi} - 1}{-it} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\xi| > a \end{aligned}$$

是与 a 无关的函数, 所以 $g(x)$ 的 Fourier 变换 $G(t)$ 就是

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-it\xi} - 1}{-it}$. 于是根据(13.9)有

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \overline{G(t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{e^{it\xi} - 1}{it} dt. \end{aligned} \quad (14.3)$$

由(14.2)及(14.3)就得到

$$\int_0^t \varphi(x) dx = \int_0^t f(x) dx,$$

所以 $f(x) = \varphi(x)$ 对于几乎所有的 x 都成立。

証毕

$f(x)$ 与 $F(t)$ 的关系可用下列公式表示。

定理 14.2 設 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 并且它的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則几乎对于所有的 t , 有

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ixt} - 1}{-ix} dx, \quad (14.4)$$

对于几乎所有的 x , 有

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{e^{ixt} - 1}{it} dt. \quad (14.5)$$

証明 把(14.3)的两边对 ξ 微分即可。因为 $F(t)$ 的 Fourier 变换是 $f(-x)$, 所以由(14.5)就得到

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ixt} - 1}{ix} dx. \end{aligned}$$

这就是公式(14.4)。

証毕

在 L_2 的情形中成立着与定理 11.1 同样的事实。

定理 14.3 設 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 并且它的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則当

$$\int_0^h |f(x+u) - f(x)| du = o(h) \quad (14.6)$$

的时候, 有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(G, \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} F(t) dt = f(x), \quad \alpha > 0. \quad (14.7)$$

注意 我們假定对于几乎所有的 x , (14.6) 式成立。

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{ixt} F(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{ixt} dt \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-iut} f(u) du \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{ixt} dt \int_{-a}^a e^{-iut} f(u) du \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f(u) du \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{it(x-u)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha} \cos t(x-u) dt. \end{aligned}$$

証明的后半部分与定理 11.1 的証法完全一样, 故此从略。

第3章 Fourier-Stieltjes 积分

§ 15 单調函数

設 $\{F_n(x)\}$ 是定义于 $-\infty < x < \infty$ 的单調增加函数的函数序列。如果有这样的一个单調增加函数 $F(x)$, 在 $F(x)$ 的連續点 x ,

$$F_n(x) \rightarrow F(x),$$

則称 $F_n(x)$ 弱收敛于 $F(x)$, 也简单地說它收敛于 $F(x)$ 。

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中連續, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 中是单調函数。設 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区間 $[a, b]$ 的一个分割, 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 中任意地取 ξ_k . 假若当 $\delta = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (F(x_{k+1}) - F(x_k))$$

与分割及 ξ_k 的选择都无关而存在, 那么这个极限值就叫做 $f(x)$ 关于 $F(x)$ 的 Riemann-Stieltjes 积分。我們把它記作

$$\int_a^b f(x) dF(x).$$

如果 $f(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 中連續, $F(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中单調, 并且

$$\lim_{b \rightarrow \infty, a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dF(x) \quad (15.1)$$

存在, 就把这个极限值記作

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x).$$

如果 $f(x)$ 連續, 則(15.1)也簡称为 Stieltjes 积分。另外, 如果

$F(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 的任意有限区间中是有界变分函数, 则因为它可以写成两个单调增加函数的差, 所以关于这种函数的积分可以写成两个 Stieltjes 积分的差, 因而也能定义关于这种 $F(x)$ 的 Stieltjes 积分. 这种积分的一些性质是大家所熟悉的, 故在此不另介绍.

下面先证一个 Helly-Bray 定理.

定理 15.1 设 $F_n(x)$ 是在 $[a, b]$ 中的单调增加函数 ($-\infty < a < b < \infty$), $F_n(x) \rightarrow F(x)$ ($n \rightarrow \infty$), 此外 $F_n(a) \rightarrow F(a)$, $F_n(b) \rightarrow F(b)$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dF_n(x) = \int_a^b f(x) dF(x). \quad (15.2)$$

这里的 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 中的连续函数.

证明 先取 $F(x)$ 以及 $F_n(x)$ ($n=1, 2, 3 \dots$) 的连续点 $x_{m,k}$.

令

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{k_m} f(x_{m,k}) I_{(x_{m,k}, x_{m,k+1})}(x),$$

在这里

$$I_{(x_{m,k}, x_{m,k+1})}(x) \begin{cases} = 1, & x_{m,k} \leq x < x_{m,k+1}, \\ = 0, & \text{对其他的 } x. \end{cases}$$

于是由于

$$\begin{aligned} \int_a^b f_m(x) dF_n(x) &= \sum_{k=1}^{k_m} f(x_{m,k}) \int_a^b I_{(x_{m,k}, x_{m,k+1})}(x) dF_n(x) \quad \textcircled{1} \\ &= \sum_{k=1}^{k_m} f(x_{m,k}) [F_n(x_{m,k+1}) - F_n(x_{m,k})], \end{aligned}$$

再根据 Stieltjes 积分的定义, 当 $m \rightarrow \infty$, $\max(x_{m,k+1} - x_{m,k}) \rightarrow 0$ 时,

$$\int_a^b f_m(x) dF_n(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dF_n(x). \quad (15.3)$$

① $f_m(x)$ 不是连续的, 所以右边应看做左边的定义. 虽然 I 在所考虑的区间中为 1, 在 $x_{m,k+1}$ 也不连续, 但是 $\int_a^b I_{(x_{m,k}, x_{m,k+1})}(x) dF_n(x) = \int_{x_m}^{x_{m,k+1}} dF_n(x)$ 是有意义的.

同样地

$$\int_a^b f_m(x) dF(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dF(x). \quad (15.4)$$

另外, 因为对于一切的 m 和 k , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$F_n(x_{m,k+1}) - F_n(x_{m,k}) \rightarrow F(x_{m,k+1}) - F(x_{m,k}).$$

所以

$$\begin{aligned} \int_a^b f_m dF_n(x) &= \sum_{k=1}^{k_m} f(x_{mk}) [F_n(x_{m,k+1}) - F_n(x_{m,k})] \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{k_m} f(x_{mk}) [F(x_{m,k+1}) - F(x_{m,k})] \\ &= \int_a^b f_m(x) dF(x). \end{aligned} \quad (15.5)$$

另外, 令

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dF_n(x) - \int_a^b f(x) dF(x) \\ &= \int_a^b \{f(x) - f_m(x)\} dF_n(x) \\ &\quad + \left\{ \int_a^b f_m(x) dF_n(x) - \int_a^b f_m(x) dF(x) \right\} \\ &\quad + \int_a^b \{f_m(x) - f(x)\} dF(x) = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, $f_m(x)$ 收敛于 $f(x)$, 即 $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_m(x)| \rightarrow 0$.

所以对任意给定的 ε , 有这样的 m_0 , 如果 $m \geq m_0$, 则 $\max |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. 又存在这样的 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 有 $|F_n(b) - F(b)| < \varepsilon$, 及 $|F_n(a) - F(a)| < \varepsilon$. 于是当 $m > m_0, n > n_0$ 时, 就有

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_a^b dF_n(x) = \varepsilon (F_n(b) - F_n(a)) \leq \varepsilon (F(b) - F(a) + 2\varepsilon). \quad (15.6)$$

同样地, 有

$$|I_3| \leq \varepsilon (F(b) - F(a)), \quad m > m_0. \quad (15.7)$$

另外取定一个 $m, m > m_0$, 并令 $n \rightarrow \infty$, 那么根据 (15.5) 就

有 $I_2 \rightarrow 0$. 于是对于使 $m > m_0$ 成立的 m ,

$$|\lim_{n \rightarrow \infty} I| \leq \varepsilon(F(b) - F(a) + 2\varepsilon) + \varepsilon(F(b) - F(a)).$$

因为右边的式子与 m 无关, 所以令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 就得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I = 0. \quad \text{証毕}$$

定理 15.2 設 $f(x)$ 在区間 $(-\infty, \infty)$ 中連續, $F_n(x)$ 在同区間中为一致有界的单调增加函数, $F_n(x) \rightarrow F(x)$, $(-\infty < x < \infty)$.

(i) 如果还有条件 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x). \quad (15.8)$$

(ii) 如果 $f(x)$ 有界, 并且 $F_n(+\infty) \rightarrow F(+\infty)$, $F_n(-\infty) \rightarrow F(-\infty)$, 則 (15.8) 仍然成立。

証明 (i) 取 ε 及 A , 使得 $|f(x)| < \varepsilon$, $|x| > A$, 并設 $|F_n(x)| < K$. 对于 $B > A$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B f(x) dF_n(x) \right| &< \varepsilon \int_A^B dF_n(x) \\ &= \varepsilon \{F_n(B) - F_n(A)\} < 2\varepsilon \cdot K. \end{aligned} \quad (15.9)$$

因为在 $-\infty$ 近傍的积分也是同样的, 所以积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_n(x)$$

存在。而积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x)$$

同样也存在。

現在令

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) \\ &= \left\{ \int_{-A}^A f(x) dF_n(x) - \int_{-A}^A f(x) dF(x) \right\} + \int_A^{\infty} f(x) dF_n(x) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-A} f(x) dF_n(x) - \int_A^{\infty} f(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{-A} f(x) dF(x) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

在(15.9)中, 令 $B \rightarrow \infty$ 就得到

$$|I_2| \leq 2\varepsilon K, \quad |I_4| \leq 2\varepsilon K,$$

同样地有 $|I_3| \leq 2\varepsilon K, \quad |I_5| \leq 2\varepsilon K.$

积分 I_1 根据定理 15.1 收敛于零, 于是证明完毕。

(ii) 取这样的 A , 使 $|F_n(\infty) - F_n(A)| < \varepsilon$, 并设 $|f(x)| \leq c$,

则

$$\left| \int_A^\infty f(x) dF_n(x) \right| < c \int_A^\infty dF_n(x) < c\varepsilon.$$

对于积分 $\int_{-\infty}^{-A}$ 可以同样地处理, 于是得知积分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dF_n(x)$$

是存在的。至于积分

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dF(x)$$

也一样是存在的。

和(i)中的证明一样, 根据定理 15.1, 对于任意的 A , 有

$$I_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

其次, 因为 $F_n(\infty) \rightarrow F(\infty)$, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有这样的 n_0 , 使得

$$|F_n(\infty) - F(\infty)| < \varepsilon \quad (n > n_0). \quad (15.10)$$

又把 A 取为 $F(x)$ 相当大的连续点, 使得

$$|F(A) - F(\infty)| < \varepsilon. \quad (15.11)$$

再取 $n > n_1$, 使得

$$|F_n(A) - F(A)| < \varepsilon. \quad (15.12)$$

于是

$$\begin{aligned} |F_n(A) - F_n(\infty)| &\leq |F_n(A) - F(A)| \\ &\quad + |F(A) - F(\infty)| + |F(\infty) - F_n(\infty)|, \end{aligned}$$

而根据(15.10), (15.11), (15.12)有

$$|F_n(A) - F_n(\infty)| < 3\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \int_A^\infty |f(x)| dF_n(x) \leq c \int_A^\infty dF_n(x) \\ &= c\{F_n(\infty) - F_n(A)\} < 3\epsilon c.\end{aligned}$$

再引用一下 (15.11), 就有

$$|I_4| \leq c \int_A^\infty dF(x) = c(F(\infty) - F(A)) < \epsilon c.$$

我們可以对 I_3, I_5 得到同样的估值, 这样就证明了(ii). 証毕

§ 16 Fourier-Stieltjes 积分

設 $F(x)$ 是定义于 $(-\infty, \infty)$ 中的有界单調增加函数. 又設 $F(\infty) = B, F(-\infty) = A$. 积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad -\infty < t < \infty \quad (16.1)$$

叫做 $F(x)$ 的 **Fourier-Stieltjes 变换**. 当 $B=1, A=0$ 的时候, 也可把 $F(x)$ 叫做**分布函数**, $f(t)$ 叫做**特征函数**. 特别是在概率論中常常使用这样的名詞.

定理 16.1 函数 $f(t)$ 具有下面的性質:

- (i) 对于 t 是一致連續的,
- (ii) $|f(t)| \leq B - A, f(0) = B - A,$
- (iii) $f(-t) = \overline{f(t)}.$

証明 (i) 取这样的 T , 使得 $F(\infty) - F(T) < \frac{\epsilon}{3}, F(-T) < \frac{\epsilon}{6}$. 对于任意給定的 ϵ , 取 δ , 使 $\delta < \frac{\epsilon}{3T(B-A)}$, 則当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}f(t_1) - f(t_2) &= \int_T^\infty (e^{it_1x} - e^{it_2x}) dF(x) + \int_{-\infty}^{-T} (e^{it_1x} - e^{it_2x}) dF(x) \\ &\quad + \int_{-T}^T (e^{it_1x} - e^{it_2x}) dF(x) \\ &= I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

这里

$$|I_1| \leq 2 \int_T^\infty dF(x) = 2(F(\infty) - F(T)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.2)$$

同样地

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.3)$$

又

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left| \int_{-T}^T e^{it_1x} (e^{i(t_1-t_2)x} - 1) dF(x) \right| \\ &\leq \int_{-T}^T |e^{i(t_1-t_2)x} - 1| dF(x) \\ &\leq \int_{-T}^T |t_1 - t_2| |x| dF(x) \\ &\leq |t_1 - t_2| T \int_{-T}^T dF(x) \leq |t_1 - t_2| T(B - A) \\ &< \delta T(B - A) \\ &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

于是结合(16.2), (16.3) 一齐考虑, 就有

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

(ii) 与 (iii) 的性质非常明显, 证明略。

证毕

特别, 令

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad (x < 0), \\ F(x) &= 1 \quad (x \geq 1). \end{aligned} \quad (16.4)$$

对于这样的函数 $F(x)$, $f(x)$ 就成为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = 1,$$

即现在不能成立和 Riemann-Lebesgue 定理对应的事实。虽然这个例子中的 $F(x)$ 是不连续函数, 但是也有 $F(x)$ 连续而它的 Fourier-Stieltjes 积分不收敛于零的例子^①。可是, 下面的定理成立。

① 参看河田: Fourier 分析与确率论(中文馆, 昭和 22 年)。

定理 16.2 設 $f(t)$ 是 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换, 則

$$(i) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ixt} dt = F(x+0) - F(x-0).$$

(ii) 特別, 如果 $F(x)$ 連續, 則

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ixt} dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad (i) \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ixt} dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-ixt} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} dF(u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(u) \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i(x-u)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-u)}{T(x-u)} dF(u). \end{aligned}$$

$$\frac{\sin Tv}{Tv} \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty, v \neq 0), \quad \frac{\sin Tv}{Tv} = 1 \quad (v = 0).$$

因为 $\frac{\sin Tv}{Tv}$ 关于 T 一致地是 v 的有界函数, 所以上列积分当 $T \rightarrow \infty$ 时的极限值, 可以把极限运算施行于积分符号之内而求得. 因此极限等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) dF(u)$$

(这里 $\varepsilon(u) = 0, u \neq x, \varepsilon(x) = 1$), 这个积分明显地等于 $F(x+0) - F(x-0)$. 証毕

下面的定理揭示一个与 Parseval 等式类似的公式.

定理 16.3 設 $F(x)$ 的不連續点是 $x_\nu (\nu = \dots, -1, 0, 1, \dots)$.

令 $F(x_\nu+0) - F(x_\nu-0) = p_\nu$, 則

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu^2. \quad (16.5)$$

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} dF(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-y)T}{(x-y)T} dF(y). \end{aligned}$$

用定理 16.2 証法中的結果来考虑, 就有

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x+0) - F(x-0)\} dF(x) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} p_v^2.\end{aligned}\quad \text{証毕}$$

§ 17 Fourier-Stieltjes 变换的反演公式

我們研究一下 Fourier-Stieltjes 变换的 Dirichlet 积分。为了简单起见, 假设 $F(x)$ 是有界非减函数, 并且在它的不連續点, 总有

$$F(x) = \frac{1}{2} \{F(x+0) + F(x-0)\}.\quad (17.1)$$

这时, 我們說函数 $F(x)$ 已被标准化。

定理 17.1 如果 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换是 $f(t)$, 則

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda(t-x)}{t-x} f(t) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iut} dF(x).\quad (17.2)$$

証明 取 $T > |x|$, 并令

$$\begin{aligned}I(T) &= \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda(t-x)}{t-x} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-T-x}^{T-x} \frac{\sin \lambda u}{u} f(u+x) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T + \frac{1}{\pi} \int_{-T-x}^{-T} - \frac{1}{\pi} \int_{T-x}^T = I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

設 $F(\infty) = B$, $F(-\infty) = A$, 則 $|f(t)| \leq B - A$, 所以

$$|I_3| \leq \frac{1}{\pi} (B - A) \int_{T-x}^T \frac{du}{u} = \frac{B - A}{\pi} \log \frac{T}{T-x},$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 右边收敛于 0. 于是

$$I_3 \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty).\quad (17.3)$$

同样地

$$I_2 \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty).\quad (17.4)$$

其次,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda u}{u} f(u+x) du = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda u}{u} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u+x)v} dF(v) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixv} dF(v) \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda u}{u} e^{iuv} du. \end{aligned}$$

由(7.2), 取 $T \rightarrow \infty$, 则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} D(\lambda, v) e^{ixv} dF(v) \text{ ①.}$$

其中

$$D(\lambda, v) = \begin{cases} 0, & |v| > \lambda, \\ \frac{1}{2}, & |v| = \lambda, \\ 1, & |v| < \lambda. \end{cases}$$

也就是有

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} I_1 &= \int_{-\lambda-0}^{\lambda-0} e^{ixv} dF(v) + \frac{1}{2} \int_{-\lambda-0}^{-\lambda+0} e^{ixv} dF(v) + \frac{1}{2} \int_{\lambda-0}^{\lambda+0} e^{ixv} dF(v) \\ &= \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixv} dF(v) - \int_{-\lambda}^{-\lambda+0} - \int_{-\lambda-0}^{\lambda} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-ix\lambda} (F(-\lambda-0) - F(-\lambda+0)) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{ix\lambda} (F(\lambda+0) - F(\lambda-0)) \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixv} dF(v) - e^{-ix\lambda} (F(-\lambda+0) - F(-\lambda)) \\ &\quad - e^{ix\lambda} (F(\lambda) - F(\lambda-0)) + \frac{1}{2} e^{-ix\lambda} (F(-\lambda-0) - F(-\lambda+0)) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{ix\lambda} (F(\lambda+0) - F(\lambda-0)), \end{aligned}$$

把这个式子代到(17.1)之内, 就得到

$$\lim_{T \rightarrow \infty} I_1 = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixv} dF(v).$$

由(17.3), (17.4)以及这个式子就得到(17.2)。

証毕

① 正确地說, 这里應該用 Lebesgue 收斂定理。

特別,如果在定理 17.1 中設 $x=0$, 則有

$$F(\lambda) - F(-\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda t}{t} f(t) dt. \quad (17.5)$$

另外, 如果以 $F\left(\xi + \frac{x}{2}\right)$ 代替 $F(\xi)$, 則由于所对应的 Fourier-Stieltjes 变换变成 $e^{-\frac{1}{2}ixt} f(t)$, (17.5) 变为

$$F\left(\xi + \frac{x}{2}\right) - F\left(-\xi + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{it\xi} - e^{-it\xi}}{it} e^{-\frac{1}{2}ixt} f(t) dt,$$

再进一步, 設 $\xi = \frac{x}{2}$, 就得到下面的結果。

定理 17.2 設有界單調增加函數 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换是 $f(t)$, 則

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ixt} - 1}{-it} f(t) dt. \quad (17.6)$$

这里的 $F(x)$ 还要滿足(17.1)。

上面的公式叫做 P. Lévy 反演公式。

定理 17.3 如果有界單調增加函數 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换 $f(t)$ 属于 $L_1(-\infty, \infty)$, 或属于 $L_2(-\infty, \infty)$, 則 $F(x)$ 可写成不定积分

$$F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du. \quad (17.7)$$

在这里 $\varphi(u) \geq 0$ (对于几乎所有的 u)。当 $f(t) \in L_1$ 时, $\varphi(u)$ 有界, 并且对于一切 $1 \leq r$, $\varphi(u) \in L_r$ 都成立。当 $f(t) \in L_2$ 时, 对一切的 $1 \leq r \leq 2$, $\varphi(u) \in L_r$ 都成立。

証明 若 $f(t) \in L_1$. 設 $f(t)$ 的普通的 Fourier 变换是 $\sqrt{2\pi} \varphi(u)$. 就是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itu} dt = \sqrt{2\pi} \varphi(u).$$

这样, $\varphi(u)$ 显然是有界的。另外

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(u) du &= \int_0^x \frac{du}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itu} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^x e^{-itu} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} f(t) dt.\end{aligned}$$

这个式子的右边和(17.6)的右边相等,所以

$$F(x) - F(0) = \int_0^x \varphi(u) du. \quad (17.8)$$

对这个公式的两边微分,就可看出对于几乎所有的 u , $\varphi(u) \geq 0$.

取 $x \rightarrow -\infty$, 则有

$$F(-\infty) - F(0) = - \int_{-\infty}^0 \varphi(u) du.$$

由(17.8)减去上式,就得(17.7)。又取 $x \rightarrow \infty$, 由(17.7)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = F(\infty) - F(-\infty).$$

这样,注意到 $\varphi(u) \geq 0$ 及 $\varphi(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 以及 $\varphi(u)$ 有界, 就可以知道 $\varphi(u) \in L_r (1 \leq r)$.

其次, 设 $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$. 再设 $f(t)$ 的 L_2 的 Fourier 变换是 $\sqrt{2\pi} \varphi(u)$, 即

$$\varphi(u) = \text{l. i. m.}_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-v}^v e^{-iu} f(t) dt.$$

和上面的情形一样, 利用 (13.11), 有

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(u) du &= \int_0^x du \text{l. i. m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-iu} f(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^x du \int_{-T}^T e^{-itu} f(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx} - 1}{-it} f(t) dt.\end{aligned}$$

于是根据(17.6), 有

$$F(x) - F(0) = \int_0^x \varphi(u) du,$$

和前面一样, $\varphi(u) \in L_1(-\infty, \infty)$, 又因为 $\sqrt{2\pi} \varphi(u)$ 是 $f \in L_2$ 的

Fourier 变换, 所以 $\varphi(u) \in L_2(-\infty, \infty)$. 因此 $\varphi(u) \in L_r(-\infty, \infty)$, $1 \leq r \leq 2$. 証毕

§ 18 Parseval 等式

设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 是在区间 $(-\infty, \infty)$ 中有界单调增加函数, 并且为简单起见, 设为连续的^①. 令

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u) dF_2(u) = F(x), \quad (18.1)$$

那么不难理解, $F(x)$ 也是有界单调增加而且是连续的. $F(x)$ 叫做 F_1 与 F_2 的结合函数. 为了与 § 6 使用完全相同的记法, 而避免混乱, 所以写作

$$F(x) = F_1 * F_2(x). \quad (18.2)$$

它与 $F_2 * F_1$ 是相等的.

定理 18.1 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换分别是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 那么 $F_1 * F_2 = F$ 的 Fourier-Stieltjes 变换 $f(t)$ 等于 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的乘积.

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u) dF_2(u)\right) \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty, A \rightarrow -\infty} \int_A^B \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty, A \rightarrow -\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n e^{itx_\nu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x_\nu - u) dF_2(u) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x_{\nu-1} - u) dF_2(u) \right\}, \end{aligned}$$

在这里, 假设 $A = x_0 < x_1 < \dots < x_n = B$, 并且 \lim 是在 $n \rightarrow \infty$, $\max(x_\nu - x_{\nu-1}) \rightarrow 0$ 的意义下来理解的. 于是

$$= \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\nu=1}^n e^{itx_\nu} \{F_1(x_\nu - u) - F_1(x_{\nu-1} - u)\} \right] dF_2(u). \quad (18.3)$$

① 如果积分是 Lebesgue-Stieltjes 积分, 就不用这一假定.

由于

$$\left| \sum_1^n e^{itx_\nu} \{F_1(x_\nu - u) - F_1(x_{\nu-1} - u)\} \right| \\ \leq \sum_1^n \{F_1(x_\nu - u) - F_1(x_{\nu-1} - u)\} = F_1(B) - F_1(A),$$

而这是有界的,所以允許把(18.3)中的 \lim 符号移到积分符号之内来运算,就有

$$\begin{aligned} (18.3) &= \lim_{B \rightarrow \infty, A \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dF_2(u) \int_A^B e^{itx} dF_1(x-u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF_2(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_1(x-u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF_2(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-u)} dF_1(x-u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} dF_2(u) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} dF_1(v) = f_1(t)f_2(t). \end{aligned}$$

証毕

此外,如果 F_1, F_2, F_3 中任何一个都是有界連續單調函數,則成立

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3). \quad (18.4)$$

§ 19 單調函數列的收斂

設 $\{F_n(x)\}$ 是單調函數列,令 $F_n(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 變換是 $f_n(t)$. 又設 $F_n(x)$ 在所有它的不連續點處都已被標準化。

現在證明下面的定理。

定理 19.1 設有一個與 n 無關的常數 M , 使得

$$F_n(\infty) - F_n(-\infty) \leq M \quad (19.1)$$

成立。又設 $f_n(t)$ 對於幾乎所有的 t 都收斂於一個函數 $f(t)$, 則

(i) $F_n(x) - F_n(-\infty)$ 收斂於一個單調增加函數(弱收斂)。

(ii) 对于几乎所有的 t , 成立着

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x). \quad (19.2)$$

証明 对

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_n(x)$$

两边施以积分, 就有

$$\begin{aligned} \int_0^t f_n(t) dt &= \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_n(x). \end{aligned} \quad (19.3)$$

取 A , 使得 $A > 2M/\varepsilon$, 其中 ε 是任意的正数。由 (19.1) 我們容易理解, $F_n(x) - F_n(-\infty)$ 是一致有界的。于是据大家所熟悉的定理, 可以找到标数 n 的部分数列 n_k ($k=1, 2, \dots$), 使得对于几乎所有的 x , 有

$$F_{n_k}(x) - F_{n_k}(-\infty) \rightarrow F(x).$$

再根据定理 15.1, 有

$$\int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_{n_k}(x) \rightarrow \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (19.4)$$

又因为

$$|f_n(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dF_n(x) \leq M,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(u) du = \int_0^t f(u) du. \quad (19.5)$$

再者

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| > A} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_n(x) \right| &\leq \frac{2}{A} \int_{|x| > A} dF_n(x) \leq \frac{2}{A} \int_{-\infty}^{\infty} dF_n(x) \\ &\leq \frac{2M}{A} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (19.6)$$

于是由 (19.3), 就有

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t f(u) du - \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x) \right| = \left| \int_0^t f(u) du - \int_0^t f_{n_k}(u) du \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_{n_k}(x) - \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x) \right| \\
& = \left| \int_0^t f(u) du - \int_0^t f_{n_k}(u) du + \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_{n_k}(x) \right. \\
& \quad \left. - \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x) + \int_{|x| > A} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_{n_k}(x) \right| \\
& \leq \left| \int_0^t f(u) du - \int_0^t f_{n_k}(u) du \right| + \left| \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_{n_k}(x) \right. \\
& \quad \left. - \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x) \right| + \left| \int_{|x| > A} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF_{n_k}(x) \right|.
\end{aligned}$$

由于(19.6), 最后一項的值不能超越 ε . 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 右边的第一, 第二兩項由(19.5)及(19.4)可知它們都收斂于零。于是

$$\left| \int_0^t f(u) du - \int_{-A}^A \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x) \right| < \varepsilon.$$

因此

$$\int_0^t f(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x).$$

把这个式子对 t 微分, 那么对于几乎所有的 t , 恒有

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{ix} dF(x).$$

又因为

$$\left| \frac{e^{ixt} - 1}{ix} - \frac{e^{ixt'} - 1}{ix} \right| = \left| \frac{e^{ix(t-t')} - 1}{ix} \right|,$$

如把 t 固定, 并令 $|t - t'| < \delta$, 那么我們能够容易地証明, 函数对于 x 一致地有界, 而不超过一个定数。所以允許在上面的公式中把微分移到积分符号之内, 从而知道

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x) \quad (19.2')$$

对于几乎所有的 t 都成立。这样就証明了(ii)。

其次, 根据定理 18.2 及 (19.2) 成立着

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-ixt} - 1}{it} f(t) dt. \quad (19.3')$$

若是 $F_n(x) - F_n(-\infty)$ 不收敛的话, 例如有这样的数列 $\{n_k\}$, 对于它 $F_{n'_k}(x) - F_{n'_k}(-\infty)$ 并不收敛于 $F(x)$. 那么我们可以在数列 $\{n_k\}$ 内取一个子列 $\{n''_k\}$, 对于它 $F_{n''_k}(x) - F_{n''_k}(-\infty)$ 收敛于 $F_1(x)$, 而 $F_1(x) - F_1(0)$ 与 $F(x) - F(0)$ 不妨假设是不同的. 但是对于 F_1 , 可以象上面这样地得到相同的 (19.3') (仅把 F 改成 F_1). 因为 (19.3') 的右边是一样的, 所以得到 $F(x) - F(0) = F_1(x) - F_1(0)$, 从而导出矛盾. 于是证明了 $F_n(x) - F_n(-\infty)$ 必定收敛于 $F(x)$. 证毕

定理 19.2 对于单调增加函数列 $\{F_n(x)\}$ 设 $F_n(\infty) = B$, $F_n(-\infty) = A$. 又设 $F_n(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换是 $f_n(t)$, $f_n(t)$ 对于几乎所有的点收敛于一个函数 $f(t)$, $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 并且 $f(0) = B - A$. 那末, $F_n(x)$ 就收敛于一个单调增加函数 $F(x)$, $F(\infty) = B$, $F(-\infty) = A$, 并且 $f(t)$ 对于几乎所有的 t 等于 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换.

证明 不失去问题的一般性可设 $A=0$. 这时不妨把 $F_n(x)$ 考虑为 $F_n(x) - A$. 于是根据定理 19.1, $F_n(x) - F_n(-\infty)$ 收敛于一个单调增加函数 $F(x)$. 因为现在 $F_n(-\infty) = 0$, 所以 $F_n(x)$ 收敛于 $F(x)$. 这样, 对于几乎所有的 t 成立着

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x). \quad (19.7)$$

余下我们要证明的, 就是

$$F(+\infty) - F(-\infty) = B. \quad (19.8)$$

(19.8) 实际所指出的, 就是 $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = B$. 要不是这样的话, 那么根据假设 $F(-\infty) \geq \eta > 0$, 而由 (19.8) 有 $F(+\infty) \geq B + \eta$. 又因为 $F_n(\infty) = B$, 所以 $F_n(x) \leq B$, 就是说

由于 $F_r(x) \rightarrow F(x)$, 就有 $F(\infty) \leq B$, 这样就引出矛盾。于是 $F(-\infty) = 0$, 而由 (19.8) 就有 $F(+\infty) = B$.

现在证明 (19.8)。先取使 (19.7) 成立的数列 $\{t_m\}$, 并设 $t_m \rightarrow 0$, 于是在

$$f(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_m x} dF(x)$$

中令 $t_m \rightarrow 0$, 则根据假设有 $f(t_m) \rightarrow B$. 又公式的右边收敛于 $\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)$. 因此

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(+\infty) - F(-\infty). \quad \text{証毕}$$

下面证明一下定理 19.2 的逆定理。

定理 19.3 设 $\{F_n(x)\}$ 是单调增加的函数列, 并设 $F_n(\infty) = B$, $F_n(-\infty) = A$. 如果 $F_n(x)$ 收敛于一个单调增加函数 $F(x)$, 并且 $F(\infty) = B$, $F(-\infty) = A$, 那么 $F_n(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换在任意有限区间中一致收敛于 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换。

证明 不失去一般性可令 $A=0$, $B=1$, 因为可以代替 $F_n(x)$ 及 $F(x)$ 而考虑 $\frac{1}{B-A}(F_n(x)-A)$ 及 $\frac{1}{B-A}(F(x)-A)$, 这时仅是它们的 Fourier-Stieltjes 变换扩大了 $\frac{1}{B-A}$ 倍。

于是取 $A=0$, $B=1$, 并且对任意的正数 ε , 取这样的 X , 使得 X 和 $-X$ 都是 $F(x)$ 的连续点, 并且 $F(-X) < \frac{\varepsilon}{12}$, $1-F(X) < \frac{\varepsilon}{12}$. 对于这个 X 决定 N_0 , 当 $n \geq N_0$ 时, 有

$$|F_n(X) - F(X)| < \frac{\varepsilon}{12}, \quad |F_n(-X) - F(-X)| < \frac{\varepsilon}{12}. \quad (19.9)$$

因为 $F_n(\pm X) \rightarrow F(\pm X)$, 所以这种取法是可能的。又任意地取定 T , 考虑这样的 t , $|t| \leq T$. 再决定这样的 N_1 , 使得 $n \geq N_1$ 时,

$$\int_{-X}^X |F_n(x) - F(x)| dx < \frac{\varepsilon}{6T}. \quad (19.10)$$

令 $N = \max(N_0, N_1)$. 設

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x) \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{-X} + \int_X^{\infty} \right) dF_n(x) \\ & \quad + \left(\int_{-\infty}^{-X} + \int_X^{\infty} \right) dF(x) + \left| \int_{-X}^X e^{ixt} d(F_n(x) - F(x)) \right| \\ & = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

若是 $n \geq N$, 用(19.9)就有

$$\begin{aligned} 0 \leq I_1 & \leq F_n(-X) + \{1 - F_n(X)\} \\ & \leq F(-X) + 1 - F(-X) + \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

$$0 \leq I_2 \leq F(-X) + \{1 - F(X)\} \leq \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{6}.$$

再使用分部积分法, 就有

$$\begin{aligned} I_3 & \leq |e^{ixt}(F_n(X) - F(X))| + |e^{-ixt}(F_n(-X) - F(-X))| \\ & \quad + \left| it \int_{-X}^X e^{ixt}(F_n(x) - F(x)) dx \right| \\ & \leq |F_n(X) - F(X)| + |F_n(-X) - F(-X)| \\ & \quad + T \int_{-X}^X |F_n(x) - F(x)| dx. \end{aligned}$$

这个式子, 由于(19.10)及(19.9)而

$$\leq \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{6}.$$

于是

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x) \right| < \varepsilon. \quad \text{証毕}$$

第4章 Mellin 变换与 Hankel 变换

§ 20 Mellin 变换

設 $s = \sigma + it$ (σ, t 是定数), $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1(0, \infty)$. 那么, 当 $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1(0, \infty)$ 时,

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx \quad (20.1)$$

就叫做 $f(x)$ 的 Mellin 变换. 如設 $x = e^y$, 則 y 在 $(-\infty, \infty)$ 中变化. 我們来考虑 $f(e^y)e^{\sigma y}$, $(-\infty < y < \infty)$, 可以看出

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(e^y)| e^{\sigma y} dy = \int_0^{\infty} |f(x)| x^{\sigma-1} dx < \infty,$$

所以这个函数的逆 Fourier 变换是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^y) e^{\sigma y} e^{ity} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx.$$

于是 $f(x)$ 的 Mellin 变换 $\mathfrak{F}(s)$ 恰好就是 $\sqrt{2\pi} f(e^y) e^{\sigma y}$ 的 Fourier 变换, 所以 Mellin 变换从理論上来看可以归結为 Fourier 变换. 譬如, 下面就把問題化成 Fourier 变换的情形来导出 Mellin 变换的反演公式.

定理 20.1 設 $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1(0, \infty)$, 并且在 x 的近傍 $f(x)$ 是有界变分函数. 如果 $f(x)$ 的 Mellin 变换是 $\mathfrak{F}(s)$ ($s = \sigma + it$), 那么

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \mathfrak{F}(s) x^{-s} ds. \quad (20.2)$$

証明 把 $\mathfrak{F}(s)$ 看成为 t 的函数 ($s = \sigma + it$). 因为它是函数 $\sqrt{2\pi} f(e^y) e^{\sigma y} = \sqrt{2\pi} \varphi(y)$ 的 Fourier 变换, 据定理 5.1 (令 $x = e^y$,

$\varphi(y)$ 在 y 的近傍为有界变分), 有

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\{\varphi(y+0)+\varphi(y-0)\}=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^T\mathfrak{F}(\sigma+it)e^{-iyt}dt.$$

令 $x=e^y$, 则有

$$\varphi(y+0)+\varphi(y-0)=\{f(x+0)+f(x-0)\}x^\sigma,$$

根据这式, 上面的式子就变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}&=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{x^{-\sigma}}{2\pi}\int_{-T}^T\mathfrak{F}(\sigma+it)x^{-it}dt\\&=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T\mathfrak{F}(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}dt\\&=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds. \quad \text{証毕}\end{aligned}$$

同样能证明, 对 Mellin 变换成立着下面这些和 §11 中同样的定理(证明从略)。

定理 20.2 設 $f(x)x^{\sigma-1}\in L_1(0,\infty)$, $f(x)$ 的 Mellin 变换是 $\mathfrak{F}(s)(s=\sigma+it)$. 如果 $f(x)$ 在点 x 处連續, 那么对于几乎所有的 x , 有

$$f(x)=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds. \quad (20.3)$$

又和 L_2 理論类似地成立着下面的定理。

定理 20.3 設 $\Re s=\sigma$, $x^{\sigma-\frac{1}{2}}f(x)\in L_2(0,\infty)$. 如果令

$$\mathfrak{F}(s,A)=\int_{1/A}^A f(x)x^{s-1}dx, \quad (20.4)$$

則 $\mathfrak{F}(s,A)$ 在区間 $(\sigma-i\infty, \sigma+i\infty)$ 中平均收敛于一个函数 $\mathfrak{F}(s)$, 就是說存在着 $\mathfrak{F}(s)$, 使得

$$\lim_{A\rightarrow\infty}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|\mathfrak{F}(s)-\mathfrak{F}(s,A)|^2ds=0. \quad (20.5)$$

此外, 如果令

$$f(x,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ia}^{\sigma+ia}\mathfrak{F}(s)x^{-s}ds, \quad (20.6)$$

則有

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |f(x) - f(x, a)|^2 x^{2\sigma-1} dx = 0. \quad (20.7)$$

并且有

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{2\sigma-1} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}(\sigma + it)|^2 dt. \quad (20.8)$$

其中 $\mathfrak{F}(s)$ 称为 $f(x)$ 的 Mellin 变换。

定理 20.4 設 $x^{\sigma-\frac{1}{2}}f(x)$ 以及 $x^{1-\sigma-\frac{1}{2}}g(x)$ 都是属于 $L_2(0, \infty)$ 的函数, 并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Mellin 变换分别是 $\mathfrak{F}(s)$ 及 $\mathfrak{G}(s)$, 則

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)ds. \quad (20.9)$$

定理 20.5 設 $x^{\sigma-\frac{1}{2}}f(x) \in L_2(0, \infty)$, $x^{0-\sigma-\frac{1}{2}}g(x) \in L_2(0, \infty)$, f, g 的 Mellin 变换分别是 $\mathfrak{F}(s)$, $\mathfrak{G}(s)$, 則 $f(x)g(x)$ 的 Mellin 变换是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathfrak{F}(w)\mathfrak{G}(s-w)dw, \quad s = c + it.$$

下面我们举几个关于 Mellin 变换的例子。設 $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1$, $f(x)$ 的 Mellin 变换是 $\mathfrak{F}(s)$, $s = \sigma + it$. 象这样的 $f(x)$ 及 $\mathfrak{F}(s)$ 有下面几个简单的例子:

$$\begin{array}{ll} f(x), & \mathfrak{F}(s), \quad \sigma, \\ \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a, \end{cases} & \frac{a^s}{s}, \quad \sigma > 0, \end{array} \quad (20.10)$$

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} \log(a/x), & 0 < x < a, \\ 0, & x \geq a, \end{cases} & \frac{a^s}{s^2}, \quad \sigma > 0. \end{array} \quad (20.11)$$

又如果設

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re s > 1), \quad (20.12)$$

則

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+k)x} x^{s-1} dx \end{aligned}$$

(容易理解此处 \int 与 \sum 允许交换)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^s} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du = \Gamma(s) \zeta(s).$$

这就说明了 $(e^x - 1)^{-1}$ 的 Mellin 变换是 $\Gamma(s) \zeta(s)$ ($\Re s > 1$). 同样能证明, $(e^x + e^{-x})^{-1}$ 的 Mellin 变换是 $\Gamma(s) L(s)$ ($\Re s > 0$). 这里

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \dots (\Re s > 0).$$

§ 21 Hankel 变换

下面我们不加证明地述说一些有关 Bessel 函数的必要知识。

我们称

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \quad (\Re \nu > -1) \quad (21.1)$$

为 ν 次的 Bessel 函数, 它是对所有的 $x > 0$ 定义的。

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

另外, 成立着积分关系

$$J_{\nu}(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xt \, dt \quad \left(\Re \nu < -\frac{1}{2}\right). \quad (21.2)$$

这个式子可以利用 $\cos xt$ 的幂级数展开式来证明。由 (21.2) 使用一下余弦变换的反演公式, 就得到 $\left(\Re \nu > -\frac{1}{2}\right)$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(x) \cos xt \, dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (21.3)$$

另外, $J_{\nu}(x)$ 有下面的渐近展开式:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu\pi\right) \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2} \dots \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu\pi\right) \left\{ \frac{4\nu^2-1^2}{1!8x} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!(8x)^3} + \dots \right\} \right\}^{(1)} (\Re\nu > -1). \quad (21.4)$$

在这个展开式中, 令 $x \rightarrow \infty$, 则 $\sqrt{x} J_\nu(x) = O(1)$. 又按 $J_\nu(x)$ 的定义, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $J_\nu(x) = O(x^\nu)$, 于是有

$$\sqrt{x} J_\nu(x) = O(1). \quad (21.5)$$

又由 (21.1), 有下面的公式

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x), \quad (21.6)$$

$$xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x), \quad (21.7)$$

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (21.8)$$

此外, 还有

$$\int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\nu, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases} \quad (21.9)$$

现在设 $f(x) \in L_1(0, \infty)$, 作下面的积分

$$H(t) = \int_0^\infty J_\nu(tx) \sqrt{tx} f(x) dx, \quad t > 0. \quad (21.10)$$

由 (21.5), 这个积分绝对收敛. $H(t)$ 叫做函数 $f(x)$ 的 ν 次 Hankel 变换. 对于这个变换成立着下面的反演公式.

定理 21.1 设 $f(x) \in L_1(0, \infty)$, 并且它在点 $x > 0$ 的近傍是有界变分函数. 设 $f(x)$ 的 Hankel 变换是 $H(t)$, 则

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \int_0^\infty H(t) J_\nu(xt) \sqrt{xt} dt, \quad \nu \geq -\frac{1}{2}. \quad (21.11)$$

① 参看 MacRobert, Spherical Harmonics, p. 274.

証明 由(21.6)及(21.11)容易导出下面的公式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left\{ \lambda \cdot \frac{x J_{\nu+1}(\lambda x) J_{\nu}(\lambda y) - y J_{\nu+1}(\lambda y) J_{\nu}(\lambda x)}{x^2 - y^2} \right\} \\ = J_{\nu}(x\lambda) J_{\nu}(y\lambda) \lambda. \end{aligned} \quad (21.12)$$

設 δ 是相当小的正数。

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} H(t) dt &= \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_0^{\infty} J_{\nu}(ty) \sqrt{ty} f(y) dy \\ &= \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_0^{x-\delta} J_{\nu}(ty) \sqrt{ty} f(y) dy \\ &\quad + \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_{x-\delta}^{x+\delta} J_{\nu}(ty) \sqrt{ty} f(y) dy \\ &\quad + \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_{x+\delta}^{\infty} J_{\nu}(ty) \sqrt{ty} f(y) dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

則

$$I_1 = \sqrt{x} \int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) dy \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) J_{\nu}(yt) t dt,$$

利用(21.12),就有

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x} \lambda \int_0^{x-\delta} \frac{x J_{\nu+1}(\lambda x) J_{\nu}(\lambda y) - y J_{\nu+1}(\lambda y) J_{\nu}(\lambda x)}{x^2 - y^2} \sqrt{y} f(y) dy \\ &= \sqrt{x} \lambda x J_{\nu+1}(\lambda x) \int_0^{x-\delta} J_{\nu}(\lambda y) \frac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2} f(y) dy \\ &\quad - \sqrt{x} \lambda J_{\nu}(\lambda x) \int_0^{x-\delta} J_{\nu+1}(\lambda y) \frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^2 - y^2} f(y) dy \\ &= J_1 - J_2. \end{aligned}$$

由(21.5),就有

$$\begin{aligned} J_1 &= O(\sqrt{\lambda}) \int_0^{x-\delta} J_{\nu}(\lambda y) \frac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2} f(y) dy \\ &= O(\sqrt{\lambda}) \int_0^{1/\lambda} + O(\sqrt{\lambda}) \int_{1/\lambda}^{x-\delta}. \end{aligned} \quad (21.13)$$

使用 $J_{\nu}(x) = O(x^{\nu})$ 这个性质, 第一項可写成

$$\begin{aligned}
& O(\sqrt{\lambda}) \int_0^{1/\lambda} O(\lambda y)^{\nu} \cdot y^{1/2} |f(y)| dy \\
&= O\left(\lambda^{\nu+1/2} \int_0^{1/\lambda} y^{\nu+1/2} |f(y)| dy\right) = O\left(\int_0^{1/\lambda} |f(y)| dy\right) \\
&= o(1), \lambda \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{21.14}$$

其次令 $\lambda y \geq 1$, 那么由 (21.4) 就能导出下式

$$\begin{aligned}
J_{\nu}(\lambda y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda y}} \cos\left(\lambda y - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu\pi\right) \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda y}} \sin\left(\lambda y - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu\pi\right) + O\left(\frac{1}{(\lambda y)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{A \cos \lambda y + B \sin \lambda y}{\sqrt{\lambda y}} + O\left(\frac{1}{(\lambda y)^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

于是 (21.13) 的第二项成为

$$\begin{aligned}
& \int_{1/\lambda}^{x-\delta} (A \cos \lambda y + B \sin \lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy + O\left(\frac{1}{\lambda} \int_{1/\lambda}^{x-\delta} \frac{|f(y)|}{y} dy\right) \\
&= O(1) \int_{1/\lambda}^{x-\delta} (A \cos \lambda y + B \sin \lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\lambda} \int_{1/\lambda}^{1/\lambda^{\frac{1}{2}}} \frac{|f(y)|}{y} dy\right) + O\left(\frac{1}{\lambda} \int_{1/\lambda^{\frac{1}{2}}}^{x-\delta} \frac{|f(y)|}{y} dy\right).
\end{aligned}$$

这里的第一项根据 Riemann-Lebesgue 定理, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 收敛于零。而第二、三两项是

$$O\left(\int_0^{1/\lambda^{\frac{1}{2}}} |f(y)| dy\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}} \int_0^{x-\delta} |f(y)| dy\right) = o(1).$$

再把这个结果及 (21.14) 代入到 (21.13) 内, 则有

$$J_1 \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

又对于 J_2 可以用同样的方法得到^①

$$J_2 \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

于是有

$$I_1 \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty). \tag{21.15}$$

其次考虑 I_3 . 这个积分是

① 因为积分中 y 的乘幂较大, 所以比 (21.13) 还简单。

$$\sqrt{x} \int_{x+\delta}^{\infty} \sqrt{y} f(y) dy \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) J_{\nu}(yt) t dt,$$

它和 I_1 完全一样, 只不过现在 y 不能很小, 所以比 I_1 的情形还要简单些, 因而能证明

$$I_3 \rightarrow 0. \quad (21.16)$$

下面再考虑 I_2 . 现在设 δ 相当小, 于是 $f(x)$ 在 $[x-\delta, x+\delta]$ 中是有界变分的. 从而 $y^{-\nu-1/2} f(y)$ 也是有界变分的. 在 $(x, x+\delta)$ 中把它写成

$$y^{-\nu-1/2} f(y) = x^{-\nu-1/2} f(x+0) + \chi_1(y) - \chi_2(y),$$

这里 $\chi_1(y)$ 和 $\chi_2(y)$ 是正的增加函数, 并且都比 ε 小. 设

$$\begin{aligned} & \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_x^{x+\delta} J_{\nu}(yt) \sqrt{yt} f(y) dy \\ &= \sqrt{x} \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) t dt \int_x^{x+\delta} J_{\nu}(yt) y^{\nu+1} \{x^{-\nu-1/2} f(x+0) \\ & \quad + \chi_1(y) - \chi_2(y)\} dy \\ &= x^{-\nu} f(x+0) \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) t dt \int_x^{x+\delta} J_{\nu}(yt) y^{\nu+1} dy \\ & \quad + \sqrt{x} \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) t dt \int_x^{x+\delta} J_{\nu}(yt) y^{\nu+1} \chi_1(y) dy \\ & \quad - \sqrt{x} \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) t dt \int_x^{x+\delta} J_{\nu}(yt) y^{\nu+1} \chi_2(y) dy \\ &= K_1 + K_2 + K_3. \end{aligned}$$

由于(21.8), 就有

$$\begin{aligned} K_1 &= x^{-\nu} f(x+0) \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) [J_{\nu+1}\{(x+1)t\} (x+\delta)^{\nu+1} \\ & \quad - J_{\nu+1}(xt) x^{\nu+1}] dt. \end{aligned}$$

在这里利用(21.9), 当 $\lambda \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ 时, 就得到

$$K_1 \rightarrow x^{-\nu} f(x+0) \left(x^{\nu} - \frac{1}{2} x^{\nu} \right) = \frac{1}{2} f(x+0). \quad (21.17)$$

对 $K_2 = \sqrt{x} \int_x^{x+\delta} \chi_1(y) y^{\nu+1} dy \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) J_{\nu}(yt) t dt,$

由第二中值定理,

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x} \chi_1(x+\delta) \int_{\xi}^{x+\delta} y^{\nu+1} dy \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) J_{\nu}(yt) t dt, \\ &= \sqrt{x} \chi_1(x+\delta) \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) t dt \int_{\xi}^{x+\delta} y^{\nu+1} J_{\nu}(yt) dy, \quad x < \xi < x+\delta, \end{aligned}$$

利用 (21.8), 求出里面的积分, 就得到

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x} \chi_1(x+\delta) \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) [(x+\delta)^{\nu+1} J_{\nu+1}\{(x+\delta)t\} \\ &\quad - \xi^{\nu+1} J_{\nu+1}(\xi t)] dt. \end{aligned}$$

这个积分是有界的。因为使用 (21.4) 能够导出下面的结果

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) J_{\nu+1}(t) dt &= \int_0^1 + \int_1^{\lambda} \\ &= O(1) + \int_1^{\lambda} \frac{2}{\pi \sqrt{x}} \frac{1}{t} \cos\left(xt - \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \nu \pi\right) \\ &\quad \times \cos\left(t - \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \nu \pi\right) dt + O(1), \end{aligned}$$

右边中间的积分不难应用 §7 中的方法证明它是有界的。

因为 $\chi_1(x+\delta) \leq \varepsilon$ (根据假设), 所以 K_2 可以小于任意已给的数。关于 K_3 能得同样的结果。于是由 (21.17) 就有

$$\int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_x^{x+\delta} J_{\nu}(yt) \sqrt{yt} f(y) dy \rightarrow \frac{1}{2} f(x+0).$$

同样地能够得到

$$\int_0^{\lambda} J_{\nu}(xt) \sqrt{xt} dt \int_{x-\delta}^x J_{\nu}(yt) \sqrt{yt} f(y) dy \rightarrow \frac{1}{2} f(x-0),$$

这样就证明了

$$I_2 \rightarrow \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

证毕

§22 Hankel 变换与多变量函数的 Fourier 变换

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 是定义在 k 维空间 R_k 的函数, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_k)| dx_1 \dots dx_k < \infty,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{令 } F(t_1, t_2, \dots, t_k) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k) e^{-i(t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k)} dx_1 \cdots dx_k,
 \end{aligned} \tag{22.1}$$

则 $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ 叫做 $f(x_1, \dots, x_k)$ 的 Fourier 变换。

现在我们特别考虑 $f(x_1, \dots, x_k)$ 是 $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ 的函数的情形。

写出它的 Fourier 变换, 即

$$F(t_1, t_2, \dots, t_k) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{k/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{i(t \cdot x)} dx_1 \cdots dx_k.$$

这里 $t \cdot x = t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k$. 现在令

$$r^2 = t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_k^2,$$

再令 $t_i = \tau \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

对 x 施以下面的变换

$$y_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i,$$

$$y_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} x_i, \quad j = 2, 3, \dots, k.$$

这里的 α_{ij} 是使得这个变换成为正交变换的系数。于是

$$r^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 = \sum_{i=1}^k y_i^2,$$

并且 $dx_1 dx_2 \cdots dx_k = dy_1 dy_2 \cdots dy_k$,

$$t \cdot x = \sum_{i=1}^k t_i x_i = \tau \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \tau y_1.$$

这样就能把 Fourier 变换写成下面的形状

$$\begin{aligned}
 & F(t_1, t_2, \dots, t_k) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{k/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 e^{i\tau y_1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2}) dy_2 \cdots dy_k \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{k/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau y_1} dy_1 \int_0^{\infty} f(\sqrt{y_1^2 + \lambda^2}) \Omega(\lambda) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{22.2}$$

这就是把 y_2, \dots, y_k 化成 $(k-1)$ 维极坐标的写法, 其中 $\Omega(\lambda)$ 是

$(k-1)$ 维球的体积, λ 是球的半径. 即

$$\Omega = \omega \cdot \lambda^{k-2}.$$

其中 ω 仅与 k 有关而与 λ 无关. 由于对于任意的 Φ 成立着

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_k^2}) dy_1 \cdots dy_k = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) \Omega(\lambda) d\lambda, \quad (22.3)$$

可特别取 $\Phi = e^{-\lambda^2}$ 而来决定函数 $\Omega(\lambda)$. 对于这样的 Φ , (22.3) 的左边成为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y_1^2 + \cdots + y_k^2)} dy_1 \cdots dy_k = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)^{k-1}.$$

而其右边是

$$\omega \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} \lambda^{k-2} d\lambda.$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}, \int_0^{\infty} \lambda^{k-2} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right),$

所以 $(\sqrt{\pi})^{k-1} = \omega \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right),$

这样就有

$$\omega = \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}.$$

把它代入到 (22.2) 内, 就有

$$\begin{aligned} & F(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &= \frac{1}{2^{k/2-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau y_1} dy_1 \int_0^{\infty} f(\sqrt{y_1^2 + \lambda^2}) \lambda^{k-2} d\lambda. \end{aligned}$$

在这里令 $\lambda = r \sin \phi, y_1 = r \cos \phi$, 则有

$$\begin{aligned} & F(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &= \frac{1}{2^{k/2-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} r^{k-1} f(r) dr \int_0^{\pi} \sin^{k-2} \phi e^{i\tau r \cos \phi} d\phi. \end{aligned} \quad (22.4)$$

但是如果在 (21.2) 中设 $t = \cos \phi, \nu = \frac{k-2}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}
 J_{(k-2)/2}(x) &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-2)/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} \phi \cos(x \cos \phi) d\phi \\
 &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \sin^{k-2} \phi \cos(x \cos \phi) d\phi \\
 &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \sin^{k-2} \phi \cdot e^{ix \cos \phi} d\phi,
 \end{aligned}$$

($\sin^{k-2} \phi \sin(x \cos \phi)$ 是 ψ 的奇函数, $\psi = \phi - \frac{\pi}{2}$). 于是

$$\int_0^{\pi} \sin^{k-2} \phi e^{i\tau r \cos \phi} d\phi = \frac{2^{\frac{1}{2}k-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)}{(\tau r)^{\frac{k}{2}-1}} J_{\frac{k}{2}-1}(\tau r). \quad (22.5)$$

把这个公式代入到(22.4)之内,就得到了

$$F(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\tau^{\frac{k}{2}-1}} \int_0^{\infty} r (r^{\frac{k}{2}-1} f(r)) J_{\frac{k}{2}-1}(\tau r) dr.$$

这就是说, Fourier 变换 $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ 现在成了仅仅与 τ 有关的函数 $F(\tau)$, 并且

$$\tau^{\frac{k}{2}-1} F(\tau) = \int_0^{\infty} r (r^{\frac{k}{2}-1} f(r)) J_{\frac{k}{2}-1}(\tau r) dr. \quad (22.6)$$

这样就得到了下面的定理。

定理 设 $f(x_1, \dots, x_k)$ 是 k 维空间 R_k 中的可积函数, 如果它仅是 r 的函数, $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$, 那么它的 Fourier 变换 $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ 就成为仅依赖于 τ 的函数 $F(\tau)$,

$$\tau = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_k^2}.$$

并且 $\tau^{\frac{k}{2}-1} F(\tau)$ 是 $r^{\frac{k}{2}-1} f(r)$ 的 $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$ 次的 Hankel 变换。

故此在 k 維空間中仅依赖于到原点距离的函数的 Fourier 变换,能够归结为一个变量的 Hankel 变换。这样,由对于 k 个变量的函数的 Fourier 变换成立的定理,就能够导出关于 Hankel 变换的定理。

第5章 Laplace 变换

§ 23 Laplace 变换

下面我们约定 $\alpha(t)$ 是定义在 $0 \leq t < \infty$ 中的函数, 并且在任意的有限区间 $[0, t]$ 中是有界变分函数. $\alpha(t)$ 也可能是具有复数值的函数, 不过这里我们考虑它仅具有实数函数值. 作积分

$$\int_0^R e^{-st} d\alpha(t),$$

其中 $s = \sigma + i\tau$. 如果积分

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} d\alpha(t) \quad (23.1)$$

对于已给的一些 s 存在的话, 把 $f(s)$ 看成 s 的函数, 它就叫做 $\alpha(t)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换. 此外, 如果对于定义在 $0 \leq t < \infty$ 中的函数 $\varphi(t)$,

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t) dt \quad (23.2)$$

存在的话, $f(s)$ 就叫做 $\varphi(t)$ 的 Laplace 变换. 下面我们用写法 $\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$ 代替写法 $\int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t) dt$.

定理 23.1 设对于某一个 $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, 成立估计式

$$\left| \int_0^u e^{-s_0 t} d\alpha(t) \right| \leq M, \quad (23.3)$$

那么对于所有的 $s = \sigma + i\tau$, $\sigma > \sigma_0$, (23.1) 恒存在, 但假设 M 是与 u 无关的常数. 因此

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \beta(t) dt. \quad (23.4)$$

这里

$$\beta(u) = \int_0^u e^{-s_0 t} d\alpha(t). \quad (23.5)$$

(23.4) 右边的积分是绝对收敛的。

证明 $\beta(u)$ 由 (23.5) 所定义。于是有

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-st} d\alpha(t) &= \int_0^R e^{-(s-s_0)t} d\beta(t) \\ &= e^{-(s-s_0)R} \beta(R) + (s-s_0) \int_0^R e^{-(s-s_0)t} \beta(t) dt. \end{aligned} \quad (23.6)$$

由于 $|e^{-(s-s_0)R}| = e^{-(\sigma-\sigma_0)R}$, 所以当 $R \rightarrow \infty$ 时, $e^{-(s-s_0)R} \rightarrow 0$. 又因为 $|\beta(R)| < M$, 所以 (23.6) 中的第一项收敛于零。同样由 (23.3), $|\beta(t)| < M$, 所以

$$\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \beta(t) dt$$

绝对收敛。于是在 (23.6) 中令 $R \rightarrow \infty$, 就得到 (23.4)。证毕
特别有下面的定理。

定理 23.2 如果 $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 对于 $s = \sigma_0 + i\tau_0$ 收敛, 则它对于一切的 $s = \sigma + i\tau$ 收敛, 只要 $\sigma > \sigma_0$.

根据这个事实, 如果 (23.1) 对于某一个 $s = s_0$ 发散, 那么它对于一切的 $s = \sigma + i\tau$ 发散, 只要 $\sigma < \sigma_0$. 因为假如 (23.1) 对某一个满足 $\sigma < \sigma_0$ 的 s 收敛, 那么根据定理 23.2, (23.1) 应该对于 $s = s_0$ 收敛而导出矛盾。所以关于积分的收敛情形只有下面三种可能性:

(i) $f(s)$ 对于所有的 s 都是发散的。

(ii) $f(s)$ 对于所有的 s 都是收敛的。

(iii) 存在着这样的 σ_0 , 使得 $f(s)$ 对于 $\Re s > \sigma_0$ 收敛, 对于 $\Re s < \sigma_0$

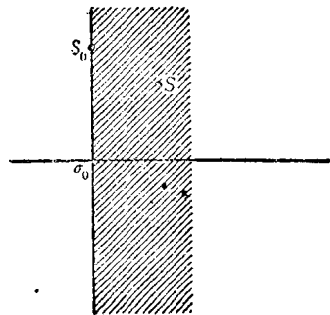


图 23.1

发散。

这三种情形实际上都可能出现。例如設

$$\alpha(t) = \int_0^t \exp(e^u) du,$$

則

$$\int_0^R e^{-st} d\alpha(t) = \int_0^R e^{-st} e^{e^t} dt. \quad (23.7)$$

現在令

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-st} e^{e^t} dt \\ &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} (\log u)^{-(s+1)} du \quad (\text{令 } u = e^t). \end{aligned}$$

假設 (23.7) 对某一个 s_0 收敛 (当 $R \rightarrow \infty$ 时), 那么对于 $\sigma_1 > \Re s_0$ 也收敛。从而当 $s = \sigma_1$ 时 $I_n \rightarrow 0$ 。但是实际上当 $s = \sigma_1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} (\log u)^{-(\sigma+1)} du > (n+1)^{-(\sigma+1)} \cdot (e^{n+1} - e^n) \\ &= (n+1)^{-(\sigma+1)} e^n (e-1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此 (23.7) 对于一切的 s 当 $R \rightarrow \infty$ 时都是发散的。这样就說明实际存在着 (i) 的情形。

其次設

$$\alpha(t) = \int_0^\infty \exp(-e^u) du,$$

則有

$$\int_R^{R'} e^{-st} d\alpha(t) = \int_R^{R'} e^{-st} e^{-t} dt,$$

所以

$$\left| \int_R^{R'} e^{-st} d\alpha(t) \right| \leq \int_R^{R'} e^{-\sigma t - e^t} dt \quad (s = \sigma + it).$$

又存在着这样的 R_0 , 如 $t > R_0$, 成立 $-\sigma t - e^t < -\frac{1}{2} e^t$. 于是取 $R' > R > R_0$, 并且 $\frac{1}{2} e^t > t (t > R_0)$, 就得到

$$\int_R^{R'} e^{-\sigma t - e^t} dt \leq \int_R^{R'} e^{-\frac{1}{2} e^t} dt < \int_R^{R'} e^{-t} dt \rightarrow 0 \quad (R', R \rightarrow \infty).$$

于是在这种情形中对于一切的 s , 总存在着 $\alpha(t)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换。

故此实际能出現(ii)的情形。

設 $\alpha(t) = t$, 則

$$\int_0^R e^{-st} d\alpha(t) = \int_0^R e^{-st} dt = \frac{e^{-sR} - 1}{-s}.$$

于是当 $R \rightarrow \infty$ 时, 如果 $\Re s > 0$, 則积分收斂; 如果 $\Re s < 0$, 則积分发散。这是属于情形(iii)的例。

如果 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 当 $\Re s > \sigma_0$ 时收斂, 当 $\Re s < \sigma_0$ 时发散, 那么 σ_0 就叫做 Laplace-Stieltjes 变换的收斂坐标。在(i)的情形 $\sigma_0 = \infty$, 在(ii)的情形 $\sigma_0 = -\infty$ 。

但是当 $\sigma = \sigma_0$ 时, Laplace-Stieltjes 变换也可能存在, 也可能不存在。

設 $\alpha(t) = t$, 这时 $\sigma_0 = 0$, 但是 $\int_0^R e^{-i\tau t} dt$ 当 $R \rightarrow \infty$ 时并不收斂。

又 $\alpha(t) = \int_0^t \frac{dt}{1+t^2}$ 时, $\sigma_0 = 0$ (这很容易証明), 而因

$$\left| \int_R^{R'} e^{-i\tau t} \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \int_R^{R'} \frac{dt}{1+t^2} \rightarrow 0 \quad (R, R' \rightarrow \infty),$$

所以对于一切的 $s = i\tau$, Laplace-Stieltjes 变换一定是收斂的。

§ 24 收斂坐标

令 $\alpha(t) = a_n, n \leq t < n+1, n=0, 1, 2, \dots$, 則

$$\int_0^{N+1/2} e^{-st} d\alpha(t) = a_0 + a_1 e^{-s} + a_2 e^{-2s} + \dots + a_N e^{-Ns}.$$

于是积分 $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N+1/2} e^{-st} d\alpha(t)$ 的收斂与否和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}$$

的收斂与否是一致的。令 $e^{-s} = e^{-\sigma} e^{-i\tau} = re^{-i\tau} = z$, 則上面的級数化成了幂級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (24.1)$$

所以 Laplace 积分 (Laplace-Stieltjes 变换) 可以看作是幂级数的推广。更一般地还可以看作是 Dirichlet 级数

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

的推广 (只要令 $\alpha(t) = a_n$, 当 $\lambda_n \leq t < \lambda_{n+1}$ 时)。如令 (24.1) 的收敛半径为 ρ , 则 $\rho^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. 因此可以同样地来考虑 Laplace 积分的收敛坐标。现在先证明下面的定理。

定理 24.1 设对某一个实数 γ , 有 $\alpha(t) = O(e^{\gamma t})$, 则积分

$$\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t) \quad (24.2)$$

当 $\Re s > \gamma$ 时收敛。

证明 根据假设, 存在着定数 M , 使得 $|\alpha(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $0 \leq t < \infty$. 于是有

$$\int_0^R e^{-st} d\alpha(t) = \alpha(R) e^{-sR} - \alpha(0) + s \int_0^R e^{-st} \alpha(t) dt.$$

但是 $|\alpha(R) e^{-sR}| \leq M e^{\gamma R} \cdot e^{-\sigma R} \quad (\sigma = \Re s),$
 $\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$

又 $\int_R^{R'} e^{-\sigma t} |\alpha(t)| dt \leq M \int_R^{R'} e^{-(\sigma-\gamma)t} dt$
 $= \frac{M(e^{-(\sigma-\gamma)R'} - e^{-(\sigma-\gamma)R})}{R - \sigma}$
 $\rightarrow 0 \quad (R' \rightarrow \infty, R \rightarrow \infty).$

因此积分 $\int_0^\infty e^{-st} \alpha(t) dt$ 绝对收敛, 于是积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 收敛。

証毕

相当于上面定理的逆定理的是下面的定理。

定理 24.2 如果积分

$$\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$$

当 $s = s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ ($\sigma_0 > 0$) 时收敛, 则

$$\alpha(t) = o(e^{\sigma_0 t}).$$

証明 設

$$\beta(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} d\alpha(u),$$

$$\begin{aligned} \text{則} \quad \alpha(t) - \alpha(0) &= \int_0^t d\alpha(u) = \int_0^t e^{s_0 u} d\beta(u) \\ &= \beta(t) e^{s_0 t} - s_0 \int_0^t e^{s_0 u} \beta(u) du, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha(t) - \alpha(0)) e^{-s_0 t} &= \beta(\infty) - \lim_{t \rightarrow \infty} s_0 e^{-s_0 t} \int_0^t e^{s_0 u} \beta(u) du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} s_0 e^{-s_0 t} \int_0^t e^{s_0 u} (\beta(\infty) - \beta(u)) du. \quad (24.3) \end{aligned}$$

但是

$$\left| e^{-s_0 t} \int_0^t e^{s_0 u} (\beta(\infty) - \beta(u)) du \right| = e^{-\sigma_0 t} \int_0^t e^{\sigma_0 u} \sigma(1) du = o(1).$$

把它代入 (24.3) 就有 $\alpha(t) - \alpha(0) = o(e^{\sigma_0 t})$. 因为当 $\sigma_0 > 0$ 时, $e^{\sigma_0 t} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$), 所以 $\alpha(t) = o(e^{\sigma_0 t})$. 証毕

定理 24.3 設积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 当 $s = s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ 时收敛, 此处 $\sigma_0 < 0$, 則 $\alpha(\infty)$ 存在, 并且 $\alpha(t) - \alpha(\infty) = o(e^{\sigma_0 t})$.

証明 因为 $\sigma_0 < 0$, 所以 $s=0$ 时 Laplace 积分收敛, 因此 $\alpha(\infty)$ 存在. 于是

$$\alpha(\infty) - \alpha(t) = \int_t^\infty d\alpha(u) = \int_t^\infty e^{s_0 u} d\beta(u),$$

这里 $\beta(u) = \int_0^u e^{-s_0 v} d\alpha(v)$. 施行分部积分后, 得到

$$\alpha(\infty) - \alpha(t) = \left[e^{s_0 u} \beta(u) \right]_t^\infty - s_0 \int_t^\infty e^{s_0 u} \beta(u) du,$$

因为 $\Re s_0 < 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{s_0 t} \beta(t) = 0$, 于是

$$= -e^{s_0 t} \beta(t) - s_0 \int_t^\infty e^{s_0 u} \beta(u) du.$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\alpha(\infty) - \alpha(t)] e^{-s_0 t} = -\beta(\infty) - \lim_{t \rightarrow \infty} s_0 \int_t^\infty e^{s_0 u} \beta(u) du$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} s_0 e^{-s_0 t} \int_t^{\infty} e^{s_0 u} [\beta(\infty) - \beta(u)] du.$$

但是

$$e^{-s_0 t} \int_t^{\infty} e^{s_0 u} [\beta(\infty) - \beta(u)] du = e^{-s_0 t} \int_t^{\infty} o(e^{\sigma u}) du = o(1). \quad \text{証毕}$$

下面考虑 Laplace 积分的收敛坐标。

定理 24.4 如果

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = \lambda \neq 0, \quad (24.4)$$

则 $\alpha(t)$ 的 Laplace 积分 $\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$ 的收敛坐标 σ_0 等于 λ 。

证明 (i) 当 $\lambda > 0$ 时, 我们先证明积分 $\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$ 对于 $\Re s > \lambda$ 是收敛的。根据假设 (24.4) 有

$$\alpha(t) = O(e^{(\lambda+\varepsilon)t}), \quad \varepsilon > 0.$$

所以由定理 24.1, Laplace 积分当 $\Re s > \lambda$ 时收敛。其次再证明积分当 $\Re s < \lambda$ 时发散。若是对某一个 σ , 积分收敛, 我们可以假设 $0 < \sigma < \lambda$ 。根据定理 24.2 有

$$\alpha(t) = o(e^{\sigma t}).$$

于是存在着满足 $|\alpha(t)| \leq M e^{\sigma t}$ 的定数 M 。从而

$$\log |\alpha(t)| \leq \log (M e^{\sigma t}) = \log M + \sigma t.$$

即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} \leq \sigma < \lambda.$$

这与假设 (24.4) 矛盾。

(ii) 当 $\lambda < 0$ 时, 用 (i) 中同样的证法, 能说明 Laplace 积分当 $\sigma > \lambda$ 时收敛。假设对某一个 $\sigma < \lambda$, 积分收敛, 则根据定理 24.3, 有 $\alpha(t) - \alpha(\infty) = o(e^{\sigma t})$ 。由 (24.4), 因为 $\lambda < 0$, 而有 $\log |\alpha(t)| \rightarrow -\infty$, 即 $\alpha(\infty) = 0$, 于是有

$$\alpha(t) = o(e^{\sigma t}).$$

这样就有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} \leq \sigma < \lambda.$$

而这也与假设 (24.4) 矛盾。

证毕

下面再述说一下当 $\lambda = \pm\infty$ 时的情形。

定理 24.5 若是

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = +\infty (-\infty),$$

则 $\alpha(t)$ 的 Laplace 积分的收敛坐标是 $\infty (-\infty)$ 。

这个定理明显地是定理 24.4 的特殊情形。

定理 24.6 設 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = 0$, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\alpha(t)$

不收敛于一定的极限值, 那么收敛坐标必等于零。

証明 当 $\Re s > 0$ 时, 积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 的收敛性可以象定理 24.4 中那样地来証明。又如 $s=0$, Laplace 积分成为 $\int_0^\infty d\alpha(t)$, 因假定了 $\alpha(t)$ 不收敛, 所以这积分也不收敛, 即收敛坐标是零。証毕

如果不假设 $\alpha(t)$ 不收敛的条件, 那么这个定理就可能不成立。譬如取 $\alpha(t) = 1 - e^{-t}$, 定理 24.6 中的第一个条件就满足了, 但是收敛坐标为 -1 。

另外还有下面的定理。

定理 24.7 若是 $\alpha(t)$ 的 Laplace 积分具有非负的收敛坐标 σ_0 , 則

$$\sigma_0 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t}. \quad (24.5)$$

証明 假设 $\sigma_0 = 0$ 。如果 (24.5) 中的 \limsup 是与 0 不同的数, 那么这就与定理 24.4 矛盾, 所以应该得到 (24.5)。

其次設 $\sigma_0 > 0$, 并且 (24.5) 中的 \limsup 不等于零, 但与 σ_0 不同, 則这个值根据定理 24.4 应该是收敛坐标, 这又导出矛盾。又如果 $\sigma_0 > 0$, 而 (24.5) 中 $\limsup = 0$ 的话, 則根据定理 24.6, 这时的收敛坐标应该 ≤ 0 , 这也与 $\sigma_0 > 0$ 矛盾。証毕

比較完整地述說收敛坐标的是下面的定理^①。

① 參看 T. Ugahe: On the abscissa of convergence of Laplace-Stieltjes integral, Ann. Institute Statistical Math., 2(1950)。

定理 24.8 积分

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) \quad (24.6)$$

的收敛坐标 σ_0 能够表达为

$$\sigma_0 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right|}{t}, \quad (24.7)$$

其中的 (t) 是满足关系 $t-1 \leq (t) < t$ 的整数。

証明 若是 (24.6) 对 $s = s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ 收敛, 那么它对 $s = \sigma$ ($\sigma > \sigma_1$) 也收敛。令

$$\beta(t) = \int_0^t e^{-\sigma u} d\alpha(u),$$

那末存在着这样的常数 M , 使得 $|\beta(t)| \leq M$ 。于是

$$\begin{aligned} \int_{(t)}^t d\alpha(u) &= \int_{(t)}^t e^{\sigma u} d\beta(u) \\ &= \beta(t)e^{\sigma t} - \beta((t))e^{\sigma(t)} - \sigma \int_{(t)}^t e^{\sigma u} \beta(u) du. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right| &\leq M(e^{\sigma t} + e^{\sigma(t)}) + |\sigma| M \int_{(t)}^t e^{\sigma u} du \\ &= M(e^{\sigma t} + e^{\sigma(t)}) + M|e^{\sigma t} - e^{\sigma(t)}|. \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right| \leq \begin{cases} 3Me^{\sigma t}, & \sigma \geq 0, \\ 3Me^{\sigma(t)}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

于是

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right|}{t} \leq \sigma.$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right|}{t} \leq \sigma_1. \quad (24.8)$$

故当积分的收敛坐标是 σ_0 时, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right|}{t} \leq \sigma_0. \quad (24.9)$$

下面我们证明和 (24.9) 相逆的不等式。为了这个目的, 令 (24.8) 的左边为 λ , 并取一个比 λ 大的数 σ , 则只要证明对于 $s = \sigma + i\tau$ 积分 (24.6) 收敛就够了。现在假设 λ 是有限的。对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 有这样的 T 存在, 使得

$$\left| \int_{(t)}^t d\alpha(t) \right| \leq e^{(\lambda+\varepsilon)t}, \quad t > T > 0. \quad (24.10)$$

把 ε 选得相当小, 使得 $\lambda + 2\varepsilon < \sigma$. 于是只要指出 (24.6) 对于 $\lambda + 2\varepsilon$ 是收敛的就够了。

设 n 是正整数, 令 $t = n + \tau$, $0 \leq \tau \leq 1$. 并设

$$\gamma_n(t) = \int_n^t d\alpha(u).$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_n^{n+\tau} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t) &= \gamma_n(n+\tau) e^{-(\lambda+2\varepsilon)(n+\tau)} \\ &\quad + (\lambda+2\varepsilon) \int_n^{n+\tau} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} \gamma_n(t) dt. \end{aligned}$$

因为根据 (24.10) 有 $|\gamma_n(t)| \leq e^{(\lambda+\varepsilon)t}$, 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+\tau} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t) \right| &\leq e^{-\varepsilon(n+\tau)} + (\lambda+2\varepsilon) \int_n^{n+\tau} e^{-\varepsilon t} dt \\ &\leq e^{-\varepsilon n} + (\lambda+\varepsilon)\tau \cdot \frac{1-e^{-\varepsilon\tau}}{\varepsilon\tau} e^{-\varepsilon n} \\ &< e^{-\varepsilon n} (1 + (\lambda+\varepsilon)) = e^{-\varepsilon n} \cdot K. \quad (24.11) \end{aligned}$$

令 $(t_1) = l$, $(t_2) = l+m$, $(m > 0)$, 则

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t) = \int_l^{l+m} + \int_{l+m}^{t_2} - \int_l^{t_1}.$$

于是

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-(\lambda+2\varepsilon)t} d\alpha(t) \right| \leq \left| \int_l^{t_1} \right| + \left| \int_{l+m}^{t_2} \right| + \sum_{p=0}^{m-1} \left| \int_{l+p}^{l+p+1} \right|.$$

由 (24.11) 就有

$$\begin{aligned} &\leq K e^{-\varepsilon l} + K e^{-\varepsilon(l+m)} + K \sum_{p=0}^{m-1} e^{-\varepsilon(l+p)} \\ &\leq e^{-\varepsilon l} \frac{3K}{1-e^{-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

因为当 $t_2, t_1 \rightarrow \infty$ 时, $l \rightarrow \infty$, 所以积分收敛于零。故此积分 (24.6) 当 $\sigma = \lambda + 2\varepsilon$ 时收敛。

当 $\lambda = \infty$, 或 $\lambda = -\infty$ 时, 也可以同样地证明。于是

$$\sigma_0 \geq \lambda.$$

把它和 (24.9) 比较, 就得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_{(t)}^t d\alpha(u) \right|}{t} = \sigma_0. \quad \text{証毕}$$

§25 Laplace 变换的正则性

定理 25.1 若是

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t) \quad (25.1)$$

对于 $s = s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ 收敛, 则在范围

$$|s - s_0| \leq K(\sigma - \sigma_0) \quad (\Re s = \sigma) \quad (25.2)$$

中, 积分一致收敛。这里 K 是大于 1 的正数。

证明 把 (25.2) 所确定的范围用 \triangle 表示。在下面的图内, \triangle 就是阴影的那个角的范围。角的两边关于过角的顶点的水平线对称, 每边和水平线作成角 θ_0 , $\frac{1}{K} = \cos \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$), 在范围内的点与顶点的连线对水平线作成角 θ , $\theta < \theta_0$ 。根据定理 23.2, 积分 (25.1) 在 \triangle 的内部收敛。

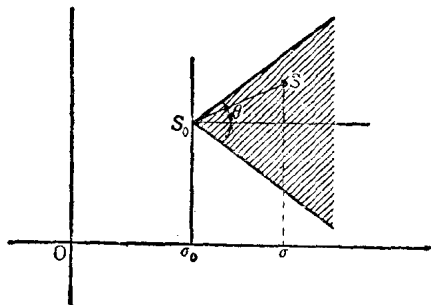


图 25.1

设 ε 是任意已给的正数。要证明定理, 只要证明存在一个仅与 K 有关, 而与 \triangle 中的 s 无关的常数 R_0 , 使得当 $s \in \triangle$, $R \geq R_0$ 时,

$$\left| \int_R^\infty e^{-st} d\alpha(t) \right| \leq \varepsilon \quad (25.3)$$

即可。令 $\beta(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} d\alpha(u)$ 。

取这样的 R_0 , 使得当 $t, t' \geq R_0$ 时,

$$|\beta(t) - \beta(t')| < \frac{\varepsilon}{K}. \quad (25.4)$$

$$\begin{aligned} \text{于是当 } R \geq R_0 \text{ 时, } \int_R^\infty e^{-st} d\alpha(t) &= \int_R^\infty e^{-(s-s_0)t} d\beta(t) \\ &= \int_R^\infty e^{-(s-s_0)t} d[\beta(t) - \beta(R)] \\ &= (s-s_0) \int_R^\infty e^{-(s-s_0)t} [\beta(t) - \beta(R)] dt. \end{aligned}$$

这样, 由 (25.4) 就有

$$\begin{aligned} \left| \int_R^\infty e^{-st} d\alpha(t) \right| &\leq |s-s_0| \cdot \frac{\varepsilon}{K} \int_R^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{K} \cdot \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}, \\ &\leq \varepsilon. \quad (\text{由于 (25.2)}) \end{aligned}$$

这就证明了 (25.3)。

证毕

由定理 25.1 能够得到下面的定理。

定理 25.2

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t) \quad (25.5)$$

在半平面 $\Re s > \sigma_0$ (σ_0 是收敛坐标) 中正则, 并且成立着公式

$$f^{(p)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t)^p d\alpha(t). \quad (25.6)$$

证明 设 s_0 是属于 $\Re s > \sigma_0$ 的任意点。因为对于满足 $\Re s_0$

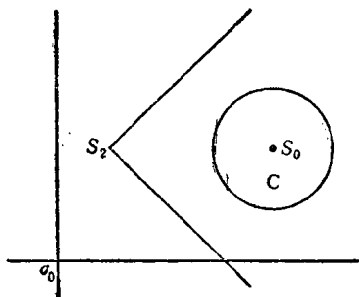


图 25.2

$\Re s > \sigma_0$ 的 s , $f(s)$ 是存在的, 所以可在这个范围内取一个 s_2 , 以 s_2 为顶点作成角范围 Δ , 包含 s_0 于其中。由于定理 25.1, (25.5) 的积分在这角范围中一致收敛。于是

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-st} d\alpha(t)$$

也在 Δ 中一致收敛, 因此这个积分在以 s_0 为中心而完全包含在 Δ 内的圆 C 中也一致收敛。

现在对于固定的 n , 研究一下积分

$$\int_n^{n+1} e^{-st} d\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-s)^{\nu}}{\nu!} \int_n^{n+1} t^{\nu} d\alpha(t). \quad (25.7)$$

由于
$$\left| \int_n^{n+1} t^{\nu} d\alpha(t) \right| \leq (n+1)^{\nu} \int_n^{n+1} |d\alpha(t)|,$$

再由于指数函数级数的一致收敛性, 所以上面的级数在 C 中一致收敛。因为级数的各项都是 s 的正则函数, 故此 (25.7) 在 C 中正则。另外根据 Weierstrass 逐项微分定理, 成立着

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{ds^p} \int_n^{n+1} e^{-st} d\alpha(t) &= \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{s^{\nu-p}}{(\nu-p)!} \int_n^{n+1} (-t)^{\nu} d\alpha(t) \\ &= \int_n^{n+1} e^{-st} (-t)^p d\alpha(t), \end{aligned}$$

这就是 (25.6)。

§ 26 Laplace-Stieltjes 变换的反演公式

定理 26.1 设积分

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) \quad (26.1)$$

的收敛坐标是 σ_0 , 并且 $\alpha(t) = \frac{1}{2} \{ \alpha(t+0) + \alpha(t-0) \}$,

($t > 0$), 则对任一个正数 $c, c > \sigma_0$, 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{f(s)}{s} e^{st} ds = \begin{cases} \alpha(t) - \alpha(0), & t > 0, \\ \frac{\alpha(+0) - \alpha(0)}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

这就是关于 Laplace-Stieltjes 变换的反演公式。

設 $\Re s = \sigma > 0, \sigma > \sigma_0$. 于是

$$\int_0^R e^{-st} d\alpha(t) = e^{-sR} \alpha(R) - \alpha(0) + s \int_0^R e^{-st} \alpha(t) dt.$$

因为 $\sigma > 0$, 所以由定理 24.2 有 $\alpha(R) = o(e^{\sigma_0 R}) (R \rightarrow \infty)$, 因此当 $R \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t) &= s \int_0^\infty e^{-st} \alpha(t) dt - \alpha(0) \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} (\alpha(t) - \alpha(0)) dt. \end{aligned}$$

設 $\alpha(t) - \alpha(0) = \alpha_1(t)$, 則有

$$\frac{f(s)}{s} = \int_0^\infty e^{-st} \alpha_1(t) dt. \quad (26.2)$$

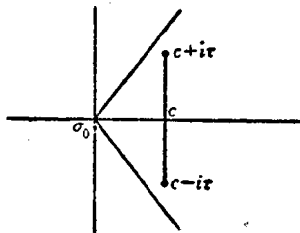
又因为 $\alpha(t) = o(e^{\sigma t})$, 即 $\alpha(t) e^{-\sigma t} = o(e^{-(\sigma - \sigma_0)t})$, 所以 $\alpha(t) e^{-\sigma t} \in L_1(0, \infty)$. 再由于 $\sigma > 0$, 故此 $\alpha(0) e^{-\sigma t} \in L_1(0, \infty)$, 于是 $\alpha_1(t) \in L_1(0, \infty)$. 这样, 对于反演公式的問題我們只需要討論形如 (26.2) 的 Laplace 的变换就够了。为了这个目的, 先証明下面的定理。

定理 26.2 設

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt, \quad (26.3)$$

其中 $\Re(s) = \sigma > \sigma_0$, σ_0 是 Laplace 变换的收敛坐标。 $\varphi(t)$ 在 t 的近傍是有界变分函数。于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \varphi(t+0) + \varphi(t-0) \} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) e^{st} ds. \end{aligned} \quad (26.4)$$



这里 c 是一个比 σ_0 大的任意的数。

証明 我們先証这个定理, 然后

图 26.1

再証定理 26.1。考虑积分

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) e^{st} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(c+i\tau) e^{(c+i\tau)t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{(c+i\tau)t} d\tau \int_0^\infty e^{-(c+i\tau)u} \varphi(u) du.\end{aligned}$$

在里面的一个积分根据定理 25.1 当 $c > \sigma_0$, $|\tau| < T$ 时一致收敛。因此

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(u) du \int_{-T}^T e^{(c+i\tau)(t-u)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(u) e^{c(t-u)} \frac{\sin T(t-u)}{t-u} du.\end{aligned}$$

最后这一积分是 Dirichlet 积分。由于 $\varphi(u)$ 在 $u=t$ 的近傍是有界变分的, 并且属于 $L_1(0, \infty)$, 所以当 $T \rightarrow \infty$ 时, 这积分收敛于

$$\frac{1}{2} \{ [\varphi(u) e^{c(t-u)}]_{t+0} + [\varphi(u) e^{c(t-u)}]_{t-0} \}.$$

而这个表达式恰好等于

$$\frac{1}{2} \{ \varphi(t+0) + \varphi(t-0) \}. \quad \text{証毕}$$

定理 26.1 的証明 现在来証明

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{f(s)}{s} e^{st} ds = \begin{cases} \alpha(t) - \alpha(0), & t > 0, \\ \frac{\alpha(+0) - \alpha(0)}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (26.5)$$

在定理 26.2 中, 用 $\frac{f(s)}{s}$ 代替 $f(s)$ 来考虑。(26.2) 的积分当 $\sigma > \sigma_0$ ($\Re s = \sigma$) 时是收敛的。于是对于大于 σ_0 的 c , 取这样的 σ , 满足 $c > \sigma > \sigma_0$, 根据 (26.4) 就有

$$\frac{1}{2} \{ \alpha_1(t+0) + \alpha_1(t-0) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{f(s)}{s} e^{st} ds.$$

这样已証明了 (26.5) 中第一行的公式。

$$\begin{aligned}\text{令} \quad \alpha_1^*(t) &= \alpha(t) \geq 0 \quad (t \geq 0), \\ \alpha_1^*(t) &= 0 \quad (t < 0),\end{aligned}$$

則(26.2)的右边可以写成

$$\frac{f(c+i\tau)}{c+i\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t} e^{-ct} \alpha_1^*(t) dt.$$

由于 $e^{-ct} \alpha_1^*(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, 所以上式的左边是函数 $\sqrt{2\pi} e^{-ct} \alpha_1^*(t)$ 的 Fourier 变换。于是由定理 5.1, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ [e^{-ct} \alpha_1^*(t)]_{t=0} + [e^{-ct} \alpha_1^*(t)]_{t=0} \} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{f(c+i\tau)}{c+i\tau} e^{i\tau t} d\tau. \end{aligned}$$

把方程的两边除以 e^{-t} , 就得到

$$\frac{1}{2} \{ \alpha_1^*(t+0) + \alpha_1^*(t-0) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{f(c+i\tau)}{c+i\tau} e^{(c+i\tau)t} d\tau.$$

左边当 $t < 0$ 时是零。又当 $t = 0$ 时, $\alpha_1^*(t-0) = 0$, $\alpha_1^*(t+0) = \lim_{t \rightarrow +0} \{ \alpha(t) - \alpha(0) \} = \alpha(+0) - \alpha(0)$. 証毕

因为定理 26.2 可以用 Fourier 变换直接地导出, 所以用上面的方法当然也能得到 $t > 0$ 情形的証明。

§ 27 結合函数的 Laplace-Stieltjes 变换

設 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 中的函数, 并且在任意的有限区間中是有界变分函数, 又假設它們是連續的^①, 且 $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, 那末

$$\gamma(t) = \int_0^t \alpha(t-u) d\beta(u) \quad (27.1)$$

就叫做 $\alpha(t)$ 及 $\beta(t)$ 的 Stieltjes 結合函数。如果它和我們到現在为止所討論的結合函数的概念不会混淆, 則就简单地称之为結合函数。

利用分部积分法容易証明, 現在的 $\gamma(t)$ 也等于

$$\int_0^t \beta(t-u) d\alpha(u),$$

① 如果把右边的积分看成 Lebesgue-Stieltjes 积分, 那么这个条件可以不要。

而且 $\gamma(0)=0$. 于是我們引入和普通結合函数相同的写法

$$\gamma(t) = \alpha * \beta(t).$$

如果 α, β, γ 都是在原点处为零的有界变分函数, 則成立着

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma). \quad (27.2)$$

現在討論一下結合函数的 Laplace 变换。对于 Laplace-Stieltjes 变换 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$, 如果积分

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} |d\alpha(t)| \quad (\Re s = \sigma)$$

收敛, 那末就說这 Laplace-Stieltjes 积分绝对收敛。

設 $\alpha(t)$ 在 $[0, t]$ 中的全变分是 $u(t)$, 积分 $\int_0^\infty e^{-\sigma t} |d\alpha(t)|$ 的实际意义是

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sigma t_i} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)|,$$

这里 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = R$ 是分点, 而且是以分点选择的方式来取上确界 (sup) 的。可以証明它是积分 $\int_0^\infty e^{-\sigma t} du(t)$ 。

此外,

$$\left| \int_0^\infty \varphi(t) d\alpha(t) \right| \leq \int_0^\infty |\varphi(t)| |d\alpha(t)| \left(= \int_0^\infty |\varphi(t)| du(t) \right). \quad (27.3)$$

定理 27.1 設 $\alpha(t), \beta(t)$ 是标准化了的, 并且在任意有限区間是有界变分的函数。又設它們都是連續的, 且 $\alpha(0)=0, \beta(0)=0$. 若是

$$f(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\alpha(t), \quad (27.4)$$

$$g(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\beta(t) \quad (27.5)$$

都绝对收敛, 則

$$f(s_0)g(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\gamma(t). \quad (27.6)$$

这里 $\gamma = \alpha * \beta$. $\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\gamma(t)$ 也绝对收敛. 如果令 $\Re s_0 = \sigma_0$, 则有

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} |d\gamma(t)| \leq \int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} |d\alpha(t)| \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} |d\beta(t)|. \quad (27.7)$$

証明 設 $A(t)$, $B(t)$ 是在 $[0, \infty]$ 內一般的連續有界变分函数. 任意地取 a 和 b , 并且令

$$0 \leq a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

对于固定的 u , 有

$$\sum_{i=0}^{n-1} |A(t_{i+1}-u) - A(t_i-u)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i-u}^{t_{i+1}-u} |dA(v)| \leq \int_0^\infty |dA(v)|.$$

把最后的积分記作 V_A . 于是如取 $C(t) = A * B(t)$, 則有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} |C(t_{i+1}) - C(t_i)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_0^{t_{i+1}} A(t_{i+1}-u) dB(u) - \int_0^{t_i} A(t_i-u) dB(u) \right| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_0^\infty \{A(t_{i+1}-u) - A(t_i-u)\} dB(u) \right|. \end{aligned}$$

这里如果当 $t < 0$ 时, 令 $A(t) = 0$, 那么 $A(t)$ 对負的 t 也就有了定义. 根据 (27.3) 有

$$\begin{aligned} & \leq \int_0^\infty \sum_{i=0}^{n-1} |A(t_{i+1}-u) - A(t_i-u)| |dB(u)| \\ & \leq V_A \int_0^\infty |dB(u)| = \int_0^\infty |dA(u)| \cdot \int_0^\infty |dB(u)|, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty |dC(t)| \leq \int_0^\infty |dA(t)| \cdot \int_0^\infty |dB(t)|. \quad (27.8)$$

上面 $A(t)$, $B(t)$ 是实数值函数, 从而 $C(t)$ 也是实数值函数, 但如果 $A(t)$, $B(t)$ 是复数值函数, 那么 $C(t)$ 也不妨相应地看作复数值函数. 不过应假設 $A(t)$ 与 $B(t)$ 的实部及虚部在 $[0, \infty)$ 中都是有界变分函数. 这时也称 $A(t)$, $B(t)$ 为有界变分函数. 于是若設

$$\sup \sum_{i=0}^{n-1} |C(t_{i+1}) - C(t_i)| = \int_a^b |dC(t)|,$$

则 (27.8) 也完全同样地成立。这里上确界 (sup) 是对于一切分割方法取的。

现在令

$$A(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} d\alpha(u),$$

$$B(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} d\beta(u),$$

并且 $C(t) = A * B(t)$ 。因为 (27.4) 及 (27.5) 绝对收敛, 所以 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 $[0, \infty)$ 中是有界变分函数。于是

$$\int_0^R |dA(t)| = \sup \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s_0 u} d\alpha(u) \right|$$

$$(0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = R)$$

(这里的上确界是对于一切的分割方法取的)。

可以取 t_i , 满足 $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$)。 δ 是这样决定的, 对于已给的 ε , 及满足条件 $t_i \leq u \leq t_{i+1}$ 的 u , 成立着 $|e^{-s_0 u} - e^{-s_0 t_i}| < \varepsilon$ 。于是

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s_0 u} d\alpha(u) \right| - \sum_{i=0}^{n-1} \left| e^{-s_0 t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\alpha(u) \right|$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |e^{-s_0 u} - e^{-s_0 t_i}| |d\alpha(u)|$$

$$< \varepsilon \int_0^R |d\alpha(u)|.$$

于是

$$\int_0^R |dA(t)| = \sup \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\sigma_0 t_i} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)|$$

$$= \int_0^R e^{-\sigma_0 t} |d\alpha(t)|.$$

因此有

$$\int_0^\infty |dA(t)| = \int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} |d\alpha(t)|,$$

$$\int_0^\infty |dB(t)| = \int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} |d\beta(t)|.$$
(27.9)

$$\begin{aligned} \text{又} \quad C(t) &= A(t) * B(t) = \int_0^t A(t-u) dB(u) \\ &= \int_0^t \left(\int_0^{t-u} e^{-s_0 v} d\alpha(v) \right) e^{-s_0 u} d\beta(u), \end{aligned}$$

由分部积分, 右边

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \left[e^{-s_0(t-u)} \alpha(t-u) + s_0 \int_0^{t-u} e^{-s_0 v} \alpha(v) dv \right] e^{-s_0 u} d\beta(u) \\ &= \int_0^t e^{-s_0 t} \alpha(t-u) d\beta(u) + s_0 \int_0^t e^{-s_0 u} d\beta(u) \int_0^t e^{-s_0(w-u)} \alpha(w-u) dw \\ &= \int_0^t e^{-s_0 t} \alpha(t-u) d\beta(u) + s_0 \int_0^t e^{-s_0 w} dw \int_0^w \alpha(w-u) d\beta(u) \\ &= e^{-s_0 t} \gamma(t) + s_0 \int_0^t e^{-s_0 w} \gamma(w) dw \\ &= \int_0^t e^{-s_0 w} d\gamma(w). \end{aligned} \quad (27.10)$$

由这个公式及 (27.8), (27.9) 就得到

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 w} |d\gamma(w)| \leq \int_0^\infty e^{-\sigma_0 u} |d\alpha(u)| \int_0^\infty e^{-\sigma_0 u} |d\beta(u)|,$$

这就是 (27.7)。因为

$$\begin{aligned} &A(t) * B(t) - f(s_0) g(s_0) \\ &= A(t) * B(t) - f(s_0) B(t) + f(s_0) (B(t) - g(s_0)) \end{aligned} \quad (27.11)$$

的右边的第三项当 $t \rightarrow \infty$ 时收敛于零, 因而设

$$\begin{aligned} &A(t) * B(t) - f(s_0) B(t) \\ &= \int_0^t \{A(t-u) - f(s_0)\} dB(u) \\ &= \int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (27.12)$$

于是

$$|I_1| \leq \int_0^{t/2} |A(t-u) - f(s_0)| |d\beta(u)|.$$

现在取 T_0 为这样大的数, 使得当 $t > T_0$ 时, $|A(t) - f(s_0)| < \varepsilon$.

(ε 是任意给定的一个正数。) 由于在上面的式子中 $t-u > \frac{t}{2}$, 所

以如果取 $t > 2T_0$, 則有

$$|A(t-u) - f(s_0)| < \varepsilon.$$

于是

$$|I_1| < \varepsilon \int_0^{t/2} |dB(u)| \leq \varepsilon \int_0^\infty |dB(u)|,$$

即

$$I_1 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (27.13)$$

还有,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{t/2}^t |A(t-u) - f(s_0)| |dB(u)| \\ &\leq (\max_{0 \leq v < \infty} |A(v)| + |f(s_0)|) \int_{t/2}^t |dB(u)|. \end{aligned}$$

由于 $A(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时收敛于 $f(s_0)$, 所以它是有界的。其次, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 因为积分 $\int_0^\infty |dB(t)| < \infty$, $\int_{t/2}^t |dB(u)| \rightarrow 0$. 于是

$$I_2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

这样, 把上面的結果和 (27.13) 代入 (27.12), 就得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) * B(t) = f(s_0)g(s_0).$$

再把这个結果代入 (27.11), 就有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = f(s_0)g(s_0).$$

由于 (27.10), $C(t) \rightarrow \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\gamma(t)$, 这样就証明了 (27.6)。

証毕

定理 27.2 設 $\alpha(t), \beta(t)$ 是在任意閉有限区間中的連續有界变分函数, $\gamma(t) = \alpha * \beta(t)$. 若是

$$f(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\alpha(t), \quad (27.14)$$

$$g(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\beta(t) \quad (27.15)$$

收敛, 并且其中有一个是绝对收敛的話, 則 $\int_0^\infty e^{-s_0 t} d\gamma(t)$ 收敛, 而且

$$f(s_0)g(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\gamma(t). \quad (27.16)$$

証明 象在定理 27.2 的証明中那样地定义 $A(t), B(t), C(t)$, 就能同样地証明

$$C(t) = A * B = \int_0^t e^{-s_0 w} d\gamma(w)$$

(这个証明中并不要用到 $\int_0^\infty |dA(t)|$ 和 $\int_0^\infty |dB(t)|$ 的有界性)。

另外, 如果再假設了 Laplace 积分 (27.15) 是絕對收斂的, 就能和前面的定理一样証明 $C(t) \rightarrow f(s_0)g(s_0)$ 。 証毕

下面特別討論一下

$$\alpha(t) = \int_0^t a(u) du, \quad \beta(t) = \int_0^t b(u) du$$

的情形。我們举出下面的定理作为上面定理的特殊情形。

定理 27.3 設 $\alpha(t), \beta(t)$ 在任意的有限区間 $(0, R)$ 中是属于 $L(0, R)$ 的函数。令

$$c(t) = \int_0^t a(t-u)b(u) du. \quad (27.17)$$

另外, 如果积分

$$f(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} a(t) dt, \quad g(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} b(t) dt$$

都是絕對收斂的話, 那么积分 $\int_0^\infty e^{-s_0 t} c(t) dt$ 也絕對收斂。并且

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} c(t) dt = f(s_0)g(s_0). \quad (27.18)$$

証明 設

$$\alpha(t) = \int_0^t a(u) du, \quad \beta(t) = \int_0^t b(u) du,$$

則它們都是連續有界变分函数, 并且当 $t=0$ 时等于零。因为 $f(s_0)$ 和 $g(s_0)$ 的积分都是絕對收斂的, 所以容易証明, 积分

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} d\alpha(t), \quad \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\beta(t)$$

也絕對收斂。于是由于定理 27.1, 如果令

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \int_0^t a(t-u) d\beta(u) \\ &= \int_0^t a(t-u) b(u) du,\end{aligned}$$

那么积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\gamma(t)$ 绝对收敛, 并且

$$\int_0^\infty e^{-st} d\gamma(t) = f(s_0) g(s_0). \quad (27.19)$$

但是

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{t-u} a(v) dv \right) b(u) du \\ &= \int_0^t b(u) du \int_u^t a(w-u) dw \\ &= \int_0^t dw \int_0^w a(w-u) b(u) du = \int_0^t c(w) dw,\end{aligned}$$

所以 (27.19) 的右边等于积分 $\int_0^\infty e^{-st} c(t) dt$. 这样就证明了 (27.18)。

因为积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\gamma(t)$ 绝对收敛, 所以 (27.18) 的左边绝对收敛。 证毕

同样地能够得到下面的定理。

定理 27.4 设 $a(t)$, $b(t)$ 是定理 27.3 中的函数, 积分 (27.14), (27.15) 收敛, 并且其中的一个绝对收敛。于是积分

$$\int_0^\infty e^{-st} d\gamma(t)$$

收敛, 并且 (27.16) 式成立, 这里的 $\gamma(t)$ 等于

$$\int_0^t a(t-u) b(u) du.$$

§ 28 Laplace 变换的例题

直接计算积分

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt, \quad (28.1)$$

就得到下面这些公式

$$\varphi(t)=1, \quad f(s)=\frac{1}{s}, \quad \Re s > 0, \quad (28.2)$$

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases} \quad f(s)=\frac{e^{-as}}{s}, \quad \Re s > 0, \quad (28.3)$$

$$\varphi(t)=t^\alpha, \quad f(s)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \Re s > 0, \quad (28.4)$$

$$\varphi(t)=e^{at}, \quad f(s)=\frac{1}{s-a}, \quad \Re s > \Re a, \quad (28.5)$$

$$\varphi(t)=\cosh ct, \quad f(s)=\frac{s}{s^2-c^2}, \quad \Re s > |\Re c|, \quad (28.6)$$

$$\varphi(t)=\sinh ct, \quad f(s)=\frac{c}{s^2-c^2}, \quad \Re s > |\Re c|, \quad (28.7)$$

$$\varphi(t)=\cos bt, \quad f(s)=\frac{s}{s^2+b^2}, \quad \Re s > |\Im b|, \quad (28.8)$$

$$\varphi(t)=\sin bt, \quad f(s)=\frac{b}{s^2+b^2}, \quad \Re s > |\Im b|, \quad (28.9)$$

$$\varphi(t)=\frac{\cos(x\sqrt{t})}{\pi\sqrt{t}}, \quad f(s)=\frac{e^{-x^2/(4s)}}{\sqrt{\pi s}}, \quad \Re s > 0, \quad (28.10)$$

(x 为定数) (\sqrt{s} 是当 $s > 0$ 时取正值的分支)

$$\varphi(t)=\frac{\sin(x\sqrt{t})}{\pi}, \quad f(s)=\frac{x}{2\sqrt{\pi s^{3/2}}}e^{-x^2/(4s)}, \quad \Re s > 0, \quad (28.11)$$

(x 为定数)

$$\varphi(t)=J_0(at) \quad (a > 0), \quad f(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}, \quad \Re s > 0, \quad (28.12)$$

($\sqrt{}$ 是当其内部为正时, 取正值的分支)

$$\varphi(t)=J_\nu(t), \quad \Re \nu > 1, \quad f(s)=\frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^\nu}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \Re s > 0. \quad (28.13)$$

($\sqrt{}$ 是当其内部为正时, 取正值的分支)

(28.4)的証明 首先考虑积分

$$\int_0^R e^{-st} t^a dt = \int_0^R e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^a \frac{du}{s}.$$

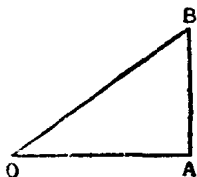


图 28.1

这里的积分路线是連結点 sT 与原点的直线。令 $s = re^{i\theta}$ 。在左边的图中，設 B 是 sT 这样的点， A 是 $rT \cos \theta$ 这样的点。由 O 到 B 的积分显然等于由 O 到 A 的积分再加上由 A 到 B 的积分。于是有

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} t^a dt &= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{rT \cos \theta} e^{-u} u^a du \\ &\quad + \frac{i}{s^{a+1}} \int_0^{rT \sin \theta} e^{-(rT \cos \theta + iv)} (rT + iv)^a du. \end{aligned}$$

这里由于 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ (因 $\Re s > 0$)，所以当 $T \rightarrow \infty$ 时，容易証明右边的第二项收敛于零，并且第一项收敛于

$$\frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^a du = \Gamma(a+1) / s^{a+1}.$$

(28.10)的証明 当 $s > 0$ 的时候，有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\cos(x\sqrt{t})}{\pi \sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-xu^2} \cos xu du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-xu^2} \cos xu du \\ &= \Re \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-xu^2} e^{-ixu} du \right), \end{aligned}$$

根据(3.15)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-x^2/(4s)}.$$

設 s 是复数，则当 $\Re s > 0$ 时，积分 $\int_0^\infty e^{-st} \cos(x\sqrt{t}) / (\pi \sqrt{t}) dt$ 是正則的。又 $\frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-x^2/(4s)}$ 当 $\Re s > 0$ 时也是正則的。如果考虑 \sqrt{s} 在正实軸上取正值的那个分支，則沿着正实軸两者完全一致，

于是得到了(28.10)。

(28.12)的证明 在(22.5)中令 $k-2=2\nu$ (并设 $\tau r=ax$)，则

$$J_\nu(ax) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{iax \cos \phi} (\sin \phi)^{2\nu} d\phi.$$

当 $\nu=0$ 时,有

$$J_0(ax) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iax \cos \phi} d\phi.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} J_0(at) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\pi e^{iat \cos \phi} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \int_0^\infty e^{-st + iat \cos \phi} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{s - ia \cos \phi}. \end{aligned}$$

这个定积分虽然可以用初等方法求积,这里我们用一般的方法——对于正弦或是余弦的有理函数的定积分算法——来求出积分的值。令

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{s - ia \cos \phi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{s - ia \cos \phi}.$$

设 $e^{i\phi} = z$, C 为单位圆 ($d\phi = i^{-1}z^{-1}dz$), 则

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{z^{-1}dz}{i \left\{ s - \frac{1}{2} ia (z + z^{-1}) \right\}} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_C \frac{dz}{(z + i\alpha s + i\sqrt{1 + \alpha^2 s^2})(z + i\alpha s - i\sqrt{1 + \alpha^2 s^2})} \end{aligned}$$

($\alpha = \frac{1}{a}$). 被积函数在 $i(\alpha s + \sqrt{1 + \alpha^2 s^2})$ 及 $i(\alpha s - \sqrt{1 + \alpha^2 s^2})$ 处具有一阶的极, 上面的积分 (被乘以 $\frac{1}{2\pi i}$ 后) 就是在 C 中的极所具有的留数的和。但是只有 $i(\alpha s - \sqrt{1 + \alpha^2 s^2})$ 是属于 C 内的极 (由于 $s > 0, a > 0$), 故此在这点的留数就是上面积分的值。但

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Res} \frac{1}{(z+i\alpha s+i\sqrt{1+\alpha^2 s^2})(z+i\alpha s-i\sqrt{1+\alpha^2 s^2})} \\
 &= \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{z+i\alpha s+i\sqrt{1+\alpha^2 s^2}} \quad (p = -i\alpha s+i\sqrt{1+\alpha^2 s^2}) \\
 &= \frac{1}{2i\sqrt{1+\alpha^2 s^2}}.
 \end{aligned}$$

于是

$$I = 2\pi i \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{2i\sqrt{1+\alpha^2 s^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}. \quad \text{証毕}$$

(28.13)的证明从略。

第6章 Fourier变换和Laplace变换 的性质和几个应用

§ 29 导函数与 Fourier 变换

設 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$,

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx.$$

把这个等式微分,形式地得到

$$F'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ixt} f(x) dx.$$

现在来証明这个公式。

定理 29.1 設 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $xf(x) \in L_1(-\infty, \infty)$.
如果 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則 $F(t)$ 可微, 并且

$$F'(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} xf(x) dx. \quad (29.1)$$

証明 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (F(t+h) - F(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix(t+h)} - e^{-ixt}}{h} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} e^{-ixt} f(x) dx, \end{aligned} \quad (29.2)$$

且

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ixh} - 1}{h} e^{-ixt} f(x) \right| &= \left| \frac{e^{-\frac{ixh}{2}} - e^{\frac{ixh}{2}}}{h} \right| |f(x)| \\ &\leq \left| \frac{2}{h} \sin \frac{xh}{2} \right| |f(x)| \leq |xf(x)|, \end{aligned}$$

而 $xf(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 所以 (29.2) 的右边当 $h \rightarrow 0$ 时的极限,
等于在积分符号内取极限后再积分的值, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ixt} f(x) dx. \quad \text{証毕}$$

同样得到下面的定理。

定理 29.2 設 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $x^n f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則 $F(t)$ n 次可微, 并且

$$F^{(n)}(t) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(x) dx. \quad (29.3)$$

与这些定理类似的定理对于 $f \in L_2$ 的情形也成立。

定理 29.3 設 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $xf(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 并且 $-ixf(x)$ 的 L_2 的 Fourier 变换是 $G(t)$, $f(x)$ 的 L_2 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 則

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

平均收敛于 $G(t)$ 。

証明 由于 $\frac{1}{h} \{F(t+h) - F(t)\}$ 的 Fourier 变换是

$$f(x) \frac{e^{-ixh} - 1}{h},$$

于是根据 Parseval 公式有

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{h} \{F(t+h) - F(t)\} - G(t) \right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \frac{e^{-ixh} - 1}{h} - (-ix)f(x) \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (29.4)$$

因为 $\left| \frac{e^{-ixh} - 1}{h} + ix \right| \leq 2x$, 于是 (29.4) 中最后的被积函数不超过 $|2xf(x)|^2$. 因为这个函数属于 $L_1(-\infty, \infty)$, 所以对于 $h \rightarrow 0$ 的极限可以取在积分符号之内。由于 $(e^{-ixh} - 1)/h - (-ix) \rightarrow 0$, 所以 $h \rightarrow 0$ 时, $J \rightarrow 0$. 証毕

现在討論定理 29.1 的逆定理。

定理 29.4 設 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $f'(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. $f(x)$ 的 Fourier 变换記为 $F(t)$, 那么 $f'(x)$ 的 Fourier 变换等于

$-itF(t)$.

証明 設 a 是某一个固定数。由于

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) dx,$$

若令 $x \rightarrow \infty$, 則因 $f' \in L_1$, 所以

$$\int_a^x f'(x) dx \rightarrow c \quad (x \rightarrow \infty),$$

于是 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c_1$, c_1 是常数。同样地由于

$$\int_a^x f'(x) dx \rightarrow d \quad (x \rightarrow -\infty),$$

因而有常数 d_1 , 使得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d_1$. 因为 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$,

所以 $c_1 = d_1 = 0$. 于是 $f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$.

这样就能进行下面的运算:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{-itx} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-itx} \right]_{-A}^A - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A (-it) e^{-itx} f(x) dx, \end{aligned}$$

令 $A \rightarrow \infty$, 就有

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-it) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx \\ &= -it \cdot F(t). \end{aligned}$$

証毕

根据 Riemann-Lebesgue 定理, 我們知道, 若 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 則 $F(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \pm\infty)$. 由上面定理进一步知道, 若 $f'(x)$ 存在, 且 $f'(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 那么 $F(t) = o(t^{-1}) (t \rightarrow \infty)$ ①. 这个理由很明显, 由于 $f'(x)$ 的 Fourier 变换是 $-itF(t)$, 而根据 Riemann-Lebesgue 定理它应该收敛于零, 这就是上面的断語。

§ 30 有限 Fourier 变换的渐近级数

称

① 原文誤为 $O(t^{-1})$, ——校者注

$$\int_a^b f(x) e^{-ixt} dx \quad (30.1)$$

为有限 Fourier 变换, 其中 a, b 是有限的数, 而 $f(x) \in L_1(a, b)$.

我们现在研究一下当 $t \rightarrow \infty$ 时积分 (30.1) 的大小.

一般, 如果 $\varphi(t)$ 是一个已给函数, 并且

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(t) + o(\varphi_N(t)), \quad t \rightarrow t_0. \quad (30.2)$$

这时, 就叫

$$\sum a_n \varphi_n(t) \quad (30.3)$$

是 $\varphi(t)$ 的达到 N 次的渐近级数. 如果 (30.2) 对于一切的 N 都成立的话, 就写成

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad t \rightarrow t_0, \quad (30.4)$$

(30.3) 的右边叫做 $\varphi(t)$ 的渐近级数. 当然, 渐近级数不一定是收敛的.

本节中我们将研究当 $t \rightarrow \infty$ 时, 积分 (30.1) 的渐近级数.

定理 30.1 设函数 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 中具有连续的 N 阶导函数, 则

$$\int_a^b e^{-ixt} f(x) dx = B_N(t) - A_N(t) + o(t^{-N}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (30.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_N(t) &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} i^n f^{(n-1)}(a) t^{-n} e^{-ita}, \\ B_N(t) &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} i^n f^{(n-1)}(b) t^{-n} e^{-ibt}. \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

证明 利用分部积分容易证明下面的等式:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-ixt} f(x) dx &= \left[\frac{e^{-ixt}}{-it} f(x) \right]_a^b + \frac{1}{it} \int_a^b e^{-ixt} f'(x) dx \\ &= if(b) t^{-1} e^{-ibt} - if(a) t^{-1} e^{-iat} \\ &\quad + \frac{1}{it} \left[\frac{e^{-ixt}}{-it} f'(x) \right]_a^b + \frac{1}{(it)^2} \int_a^b e^{-ixt} f''(x) dx \\ &= if(b) t^{-1} e^{-ibt} - i^2 f'(b) t^{-2} e^{-ibt} \end{aligned}$$

$$-if(a)t^{-1}e^{-iat} + i^2f'(a)t^{-2}e^{-iat} \\ + \frac{1}{(it)^2} \int_a^b e^{-ixt} f''(x) dx.$$

反复地用这种方法,就得到

$$= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} i^n t^{-n} f^{(n-1)}(b) e^{-ibt} \\ - \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} i^n t^{-n} f^{(n-1)}(a) e^{-iat} \\ + \frac{1}{(it)^N} \int_a^b e^{-ixt} f^{(N)}(x) dx.$$

据 Riemann-Lebesgue 定理有

$$\int_a^b e^{-ixt} f^{(N)}(x) dx = o(1),$$

于是就证明了(30.5)。

証毕

若是 $f^{(n)}(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow -\infty), n=0, 1, \dots, N-1,$

并且 $f^{(N)}(x) \in L_1(-\infty, b)$ 的话, 那么(30.5)对于积分 $\int_{-\infty}^b$ 成立。

又如果

$f^{(n)}(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty), n=0, 1, \dots, N-1, f^{(N)}(x) \in L_1(a, \infty)$

的话, 那么(30.5)对于积分 \int_a^{∞} 也成立。

下面我们讨论一下当积分区間的一个端点是函数的奇异点的情形。

定理 30.2 (i) 設 $f(x)$ 在区間 $a \leq x \leq b$ 中具有連續的 N 阶导函数, 并且 $f^{(n)}(b) = 0, n=0, 1, \dots, N-1$. 又設 $0 < \lambda < 1$, 則有

$$\int_a^b e^{-itx} (x-a)^{\lambda-1} f(x) dx = -A_N(t) + o(t^{-N}), t \rightarrow \infty. \quad (30.7)$$

这里

$$A_N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!} e^{-\pi i(n+\lambda+1)/2} f^{(n-1)}(a) t^{-n+1-\lambda} e^{-itb}. \quad (30.8)$$

(ii) 設 $f(x)$ 在区間 $a \leq x \leq b$ 中具有連續的 N 阶导函数, 并且 $f^{(n)}(a) = 0, n = 0, 1, \dots, N-1$, 又設 $0 < \mu < 1$, 則有

$$\int_a^b e^{-itz} (b-x)^{\mu-1} f(x) dx = B_N(t) + o(t^{-N}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (30.9)$$

这里

$$B_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(n+\mu-1)}{(n-1)!} e^{-\pi i(n-1+3\mu)/2} f^{(n-1)}(b) t^{-n+1-\mu} e^{-itb}. \quad (30.10)$$

証明 我們来証明 (30.7). 至于 (30.9) 的証明方法是同样的. 利用分部积分, 就有

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{-itz} (x-a)^{\lambda-1} f(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \left[\underbrace{\int_a^b e^{-itz} (x-a)^{\lambda-1} dx}_N \cdot f^{(n-1)}(x) \right]_a^b \\ &+ (-1)^N \underbrace{\int_a^b e^{-itz} (x-a)^{\lambda} dx}_N \cdot f^{(N)}(x) dx. \end{aligned} \quad (30.11)$$

現在設 $x > a$, 并引入下面的写法:

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_{x-i\infty}^x (u-x)^n (u-a)^{\lambda-1} e^{-itu} du = h_{n+1}(x). \quad (30.12)$$

由于积分的絕對值是

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty |u-x|^n |u-a|^{\lambda-1} e^{-ty} dy < \infty \quad (u = x - iy),$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} h_{n+1}(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{h} \left(\int_{x+h-i\infty}^{x+h} - \int_{x-i\infty}^x \right) (u-x-h)^n \cdot (u-a)^{\lambda-1} e^{-itu} du \right. \\ & \quad \left. + \frac{(-1)^n}{n!} \int_{x-i\infty}^x \frac{1}{h} \{ (u-x-h)^n - (u-x)^n \} (u-a)^{\lambda-1} e^{-itu} du \right] \\ &= \left[\frac{(-1)^n}{n!} (u-x)^n (u-a)^{\lambda-1} e^{-itu} \right]_{u=a} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{x-i\infty}^x (u-x)^{n-1} (u-a)^{\lambda-1} e^{-itu} du = h_n(x).$$

又因为

$$h_1(x) = \int_{x-i\infty}^x (u-a)^{\lambda-1} e^{-itu} du,$$

并能证明 $h_1(x) = (x-a)^{\lambda-1} e^{-itx}$, 所以得到

$$\underbrace{\int \cdots \int}_n e^{-itx} (x-a)^{\lambda-1} dx = h_n(x).$$

于是根据 (30.11) 有

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{-itx} (x-a)^{\lambda-1} f(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} [h_n(b) f^{(n-1)}(b) - h_n(a) f^{(n-1)}(a)] \\ &+ (-1)^N \int_a^b h_N(x) f^{(N)}(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} h_n(a) f^{(n-1)}(a) \\ &+ (-1)^N \int_a^b h_N(x) f^{(N)}(x) dx. \end{aligned} \quad (30.13)$$

现在对 $h_n(x)$ 进行一下估计。在 (30.12) 中, 令 $u = x - iy$, 则有

$$h_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty i (-iy)^{n-1} (x-iy-a)^{\lambda-1} e^{-itx} e^{-ty} dy. \quad (30.14)$$

由于 $|x-iy-a| \geq x-a$, $|x-iy-a|^{\lambda-1} \leq (x-a)^{\lambda-1}$ ($0 < \lambda < 1$),

于是

$$|h_n(x)| \leq \frac{(x-a)^{\lambda-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-iy} dy = (x-a)^{\lambda-1} t^{-n}. \quad (30.15)$$

又由 (30.14) 有

$$\begin{aligned} h_n(a) &= \frac{(-1)^{n-1} i}{(n-1)!} \int_0^\infty (-iy)^{n+\lambda-2} e^{-ita} e^{-ty} dy \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (-i) i^{n+\lambda-2} e^{-ita} \Gamma(n+\lambda-1) t^{-n-\lambda+1} \\ &= (-1)^{n-1} e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\lambda+1)} e^{-ita} \Gamma(n+\lambda-1) t^{-n-\lambda+1}. \end{aligned} \quad (30.16)$$

再利用一下(30.15)就有

$$\left| \int_a^b h_N(x) f^{(N)}(x) dx \right| \leq t^{-n} \int_a^b (x-a)^{\lambda-1} |f^{(N)}(x)| dx = O(t^{-n}).$$

把这个式子连同(30.16)代入(30.13), 就得到

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{-itx} (x-a)^{\lambda-1} f(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!} e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\lambda+1)} f^{(n-1)}(a) t^{-n-\lambda+1} e^{-itb}. \quad \text{証毕} \end{aligned}$$

定理 30.2 在 $\lambda=1$ 及 $\mu=1$ 时也是成立的。譬如当 $\lambda=1$ 时, 这时的 $A_N(t)$ 就成为定理 30.1 中的 $A_N(t)$, 并且 $O(t^{-N})$ 在 (30.5) 中变为 $o(t^{-N})$. 所以定理 30.1 是比较好的。

下面讨论一下区间的两端都是奇异点的情形。

定理 30.3 设 $f(x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 中具有连续的 N 阶导函数, 并且 $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \mu \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned} & \int_a^b (x-a)^{\lambda-1} (b-x)^{\mu-1} e^{-itx} f(x) dx \\ &= B_N(t) - A_N(t) + O(t^{-N}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (30.17) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} & A_N(x) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(n+\lambda-1)}{(n-1)!} e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\lambda+1)} t^{-n-\lambda+1} e^{-itb} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [(b-a)^{\mu-1} f(a)], \end{aligned} \quad (30.18)$$

$$\begin{aligned} & B_N(x) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(n+\mu-1)}{(n-1)!} e^{-\frac{\pi i}{2}(n+\mu+1)} t^{-n-\mu+1} e^{-ita} \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} [(b-a)^{\lambda-1} f(b)]. \end{aligned} \quad (30.19)$$

当 $\lambda=\mu=1$ 时, 在(30.17)右边的 $O(t^{-N})$ 就用 $o(t^{-N})$ 代替。

证明 设 $\nu(x)$ 是在区间 (a, b) 中无限次可微的函数, 并且

$$\nu(a)=1, \quad \nu^{(n)}(a+0)=0, \quad n=1, 2, \dots \quad (30.20)$$

又设

$$\nu^{(n)}(b-0)=0, \quad n=1, 2, \dots \quad (30.21)$$

譬如令

$$\nu(x) = \int_x^b \exp\left(-\frac{1}{u-a} - \frac{1}{b-u}\right) du \bigg/ \int_a^b \exp\left(-\frac{1}{u-a} - \frac{1}{b-u}\right) du,$$

那末它就满足(30.20)及(30.21). 利用这个函数,就得到

$$\begin{aligned} & \int_a^b e^{-i\lambda t} (x-a)^{\lambda-1} (b-x)^{\mu-1} f(x) dx \\ &= \int_a^b e^{-i\lambda t} (x-a)^{\lambda-1} [\nu(x) (b-x)^{\mu-1} f(x)] dx \\ & \quad + \int_a^b e^{-i\lambda t} (b-x)^{\mu-1} [1-\nu(x)] (x-a)^{\lambda-1} f(x) dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

积分 I_1 具有定理 30.2 中(30.7)的形状, 只是(30.7)中的 f 现在是 $\nu(x) (b-x)^{\mu-1} f(x)$. 由于这个函数的一切导函数在 $x=b-0$ 处等于零, 于是只要注意一下

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\nu(x) (b-x)^{\mu-1} f(x)] \right\}_{x=a} = \frac{d^{n-1}}{d^{n-1}a} \{ (b-a)^{\mu-1} f(a) \}$$

就能了解(30.18)应该成立。

同样地能够证明积分 I_2 就是(30.19). 当 $\lambda=\mu=1$ 的时候, 根据定理 30.1, 就把 $O(t^{-N})$ 写成 $o(t^{-N})$. 証毕

§ 31 函数变换和 Fourier 积分及 Laplace 积分

设 $f(x)$ 的 Fourier 变换是 $F(t)$, 下面的定理决定 $f(ax+b)$ 的 Fourier 变换。

定理 31.1 设 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ 或是 $\in L_2(-\infty, \infty)$, 则 $f(ax+b)$ 的 Fourier 变换

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 是 } \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) e^{-\frac{itb}{a}},$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, 是 } -\frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) e^{-\frac{itb}{a}}.$$

証明 (i) 設

$$f(x) \in L_1(-\infty, \infty),$$

則

$$f(ax+b) \in L_1(-\infty, \infty),$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b) e^{-itx} dx = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-it \frac{u-b}{a}} du, \quad a > 0$$

(可在左边令 $ax+b=u$. 考虑当 x 在 $(-\infty, \infty)$ 中变动时, 由于 $a > 0$, 所以 u 也在 $(-\infty, \infty)$ 中变动, 就得到右边)。同样地当 $a < 0$ 时, 左边就

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-it \frac{u-b}{a}} du.$$

所以两式合并, 左边就

$$= \pm \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{\frac{itb}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{itu}{a}} du.$$

(ii) 又如果 $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ 时, 令 $a > 0$, 則

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(ax+b) e^{-itx} dx - \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) e^{-\frac{itb}{a}} \right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \int_{-aA+b}^{aA+b} f(u) e^{-it \frac{u-b}{a}} du - \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) e^{-\frac{itb}{a}} \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-aA+b}^{aA+b} f(u) e^{-i \frac{t}{a} u} du - F\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-aA+b}^{aA+b} f(u) e^{-ity} du - F(y) \right|^2 dy. \end{aligned}$$

这个式子, 因为 F 是 f 的 Fourier 变换, 所以当 $A \rightarrow \infty$ 时收敛于零。对于 $a < 0$ 时, 証明可以同样地进行。 証毕

下面討論一下关于 Laplace 变换的情形。

定理 31.2 $f(t)$ ($0 < t < \infty$) 是已給的函数, 設

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(at-b), \quad t \geq b/a \quad (a > 0, b \geq 0) \\ &= 0, \quad t < b/a. \end{aligned}$$

又設 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)$ 当 $\Re s > c$ 时收敛, 那么 $f_1(t)$ 的

Laplace 变换 $F_1(s)$ 当 $\Re s > ca$ 时收敛, 并且

$$F_1(s) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

证明 設

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-st} f_1(t) dt &= \int_{\frac{b}{a}}^{\frac{R}{a}} e^{-st} f(at-b) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{aR-b}{a}} e^{-s \frac{u+b}{a}} f(u) du \\ &= \frac{1}{a} e^{-\frac{sb}{a}} \int_0^{aR-b} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du. \end{aligned}$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 由于 $\Re(s/a) > c$, 所以积分收敛, 但是

$$\frac{1}{a} e^{-\frac{sb}{a}} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} e^{-\frac{sb}{a}} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad \text{証毕}$$

定理 31.3 設 $f(t)$ 当 $\Re s > c$ 时的 Laplace 变换是 $F(s)$, 則 $F(as+b)$ (其中 $a > 0$, $\Re s > -\frac{b}{a}$) 是 $\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} f\left(\frac{t}{a}\right)$ 的 Laplace 变换。

这个定理的证明也很简单, 故从略。

下面研究一下 n 重积分及 n 阶导函数的 Laplace 变换。以后常常用下面的写法:

$$\int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} f(u) du = \left(\int_0^t du \right)^n f(u).$$

变换一下积分 $\int_0^{t_1} \int_0^{t_1} f(u) du$ 中的积分顺序, 就有

$$\int_0^{t_1} f(u) du \int_u^{t_1} dt_1 = \int_0^{t_1} (t_2 - u) f(u) du.$$

反复地使用这种方法, 就得到

$$\int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} f(u) du = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u) du.$$

定理 31.4 設 $f(t)$ 的 Laplace 积分 $F(s)$ 当 $\Re s > c > 0$ 时收敛, 則

$$f_n(t) = \left(\int_0^t \right)^n f(u) du$$

的 Laplace 积分 $F_n(s)$ 当 $\Re s > c > 0$ 时收敛, 并且

$$F_n(s) = s^{-n} F(s). \quad (31.1)$$

証明 这里只証明当 $n=1$ 的情形, 一般的情形可以把同样的方法重复地使用而得到。事实上,

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-st} dt \int_0^t f(u) du &= \int_0^R f(u) du \int_u^R e^{-st} dt \\ &= \int_0^R s^{-1} e^{-su} f(u) du - \int_0^R s^{-1} e^{-sR} f(u) du = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

根据假设, 当 $\Re s > c$, $R \rightarrow \infty$ 时, 积分

$$I_1 = s^{-1} \int_0^R e^{-su} f(u) du$$

收敛于 $s^{-1} F(s)$. 令 $\Re s = \sigma$. 由于 $\sigma > 0$, 所以据定理 24.2, 有

$$\int_0^R f(u) du = o(e^{\sigma R}).$$

于是

$$I_2 = s^{-1} e^{-\sigma R} o(e^{\sigma R}) = o(1). \quad \text{証毕}$$

定理 31.5 設 $f(t)$ 当 $t > 0$ 时 n 次可微, 并且

$$f(+0), f'(+0), \dots, f^{(n-1)}(+0),$$

都是存在的。若 $f^{(n)}(t)$ 的 Laplace 变换 $F_n(s)$ 当 $\Re s > c > 0$ 时收敛的话, 那么 $f^{(n-1)}(t), \dots, f'(t), f(t)$ 的 Laplace 变换当 $\Re s > c$ 时也收敛, 并且有

$$\begin{aligned} F_n(s) &= s^n F(s) - f(+0)s^{n-1} - f'(+0)s^{n-2} \\ &\quad - \dots - f^{(n-1)}(+0). \end{aligned} \quad (31.2)$$

这里的 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的 Laplace 变换。

証明 只証明 $n=1$ 的情形, 一般的情形可以重复这里的討論而得到。事实上,

$$\int_0^R e^{-su} f'(u) du = \left[f(u) e^{-su} \right]_0^R + s \int_0^R e^{-su} f(u) du. \quad (31.3)$$

若 $f'(t)$ 的 Laplace 变换对于 s ($\Re s > c > 0$) 收敛的话, 根据定理 24.2 就有

$$f(u) = o(e^{\sigma R}) \quad (\sigma = \Re s),$$

于是当 $R \rightarrow \infty$ 时, $f(R)e^{-sR} \rightarrow 0$. 由于这个理由, (31.3) 左边的积分应该是收敛的, 所以右边的积分 $\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$, 即 $f(u)$ 的 Laplace 变换也应该收敛. 故此当 $R \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\int_0^\infty e^{-su}f'(u)du = -f(+0) + s \int_0^\infty e^{-su}f(u)du. \quad \text{証毕}$$

§ 32 Laplace 方法

現在我們研究具有下列形状 of 积分:

$$f(x) = \int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt \quad (32.1)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时的状态. 設 $h(t)$ 是仅取实数值的函数, 并且它在 $t=\tau$ 处有极大值, 即 $h(t) < h(\tau)$ ($t \neq \tau$).

当 x 这个数很大时, 被积函数在 τ 的近傍迅速地趋于极大值, 所以积分自身的值, 实际由在 τ 附近的值所支配着. 因此可以把被积函数在 $t=\tau$ 的近傍展开, 而由此求得积分的渐近值. 这种求积分 (32.1) 的近似值的方法, 叫做 **Laplace 方法**.

現在設 $h(t)$ 在 $t=a$ 处有极大值, 即 $h(t) < h(a)$, $a < t \leq b$. $g(t)$ 是連續函数, h 具有連續的二阶导函数, 并且

$$h'(a) = 0, \quad h''(a) < 0.$$

$$\text{令} \quad h(a) - h(t) = u^2. \quad (32.2)$$

若 η 是十分小的正数, 則 $h'(t)$ 在 $a < t < a + \eta$ 中恒是負的, 这就是說根据 (32.2) 所唯一确定的 $u(u > 0)$ 是 t 的單調函数. 于是可設

$$h(t) \leq h(a + \eta) \quad (a + \eta \leq t \leq b).$$

設 $g(a) \neq 0$. 把 η 取得足够小, 則对于任一个已給的数 ε , 可以使得

$$g(t) > \varepsilon > 0 \quad (a \leq t \leq a + \eta)$$

(或是 $g(t) < -\varepsilon$, 結果也一样)。

由于 $h(t)$ 对 $a < t < a + \eta$ 是减函数, 因而可以設

$$h(t) - h(a + \eta) > \varepsilon' > 0 \quad (a \leq t \leq a + \eta' < a + \eta).$$

于是有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_a^{a+\eta} g(t) e^{xh(t)} dt}{\int_a^{a+\eta} g(t) e^{xh(t)} dt} \right| \leq \left| \frac{\int_a^{a+\eta} g(t) e^{xh(a+\eta)} dt}{\int_a^{a+\eta} g(t) e^{xh(t)} dt} \right| \\ &= \frac{\int_a^{a+\eta} |g(t)| dt}{\left| \int_a^{a+\eta} g(t) e^{x(h(t)-h(a+\eta))} dt \right|} \leq \frac{\int_a^{a+\eta} |g(t)| dt}{\varepsilon \int_a^{a+\eta'} e^{x(h(t)-h(a+\eta))} dt} \\ &\leq \frac{\int_a^{a+\eta} |g(t)| dt}{\varepsilon e^{\varepsilon' x \eta'}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此有

$$f(x) \sim \int_a^{a+\eta} g(t) e^{xh(t)} dt. \quad (32.3)$$

利用(32.2)作积分变数的变换, 就得到

$$\int_a^{a+\eta} g(t) e^{xh(t)} dt = - \int_0^U 2u \frac{g(t)}{h'(t)} \{ \exp x(h(a) - u^2) \} du, \quad (32.4)$$

其中

$$U = [h(a) - h(a + \eta)]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $t \rightarrow a$ 时, $g(t) \rightarrow g(a)$, 又因为有

$$\frac{u}{h'(t)} = \frac{(h(a) - h(t))^{\frac{1}{2}}}{h'(t) - h'(a)} = \frac{\left\{ \frac{-(t-a)^2}{2} h''(\xi_1) \right\}^{\frac{1}{2}}}{(t-a) h''(\xi_2)}$$

($a < \xi_1, \xi_2 < t$), 所以当 $t \rightarrow a$ 时, 有

$$\frac{2u}{h'(t)} \rightarrow \left[\frac{-2}{h''(a)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

若是 η 相当小的話, U 也相当小, 故此(32.4)右边的积分能够写成

$$\left[\frac{-2}{h''(a)} \right]^{\frac{1}{2}} g(a) \int_0^U e^{-x u^2 + x h(a)} du.$$

定理 32.1 設 $h(t)$ 在 $t=a$ 处有极大值, 并且具有二阶連續導函数, 又設在 $a < t \leq b$ 中 $h(t) < h(a)$, 且

$$h'(a) = 0, \quad h''(a) < 0.$$

此外, 設 $g(t)$ 是連續函数, $g(a) \neq 0$. 这样就有

$$f(x) \sim \left[\frac{-\pi}{2xh''(a)} \right]^{\frac{1}{2}} g(a) e^{xh(a)}. \quad (32.5)$$

証明 根据中值定理, 容易証明存在着正数 η , 使得

$$a < t < a + \eta \text{ 时, } h'(t) < 0.$$

若是选择 η , 使得在 $a < t < a + \eta$ 中, $|g(t)| \neq 0$, 那么根据上面的証明, 就有

$$f(x) \sim \left[\frac{-2}{h''(a)} \right]^{\frac{1}{2}} g(a) e^{xh(a)} \int_0^U e^{-x^2 u} du,$$

其中

$$U = [h(a) - h(a + \eta)]^{\frac{1}{2}}.$$

但是

$$\begin{aligned} \int_0^U e^{-x^2 u} du &= \int_0^\infty e^{-x^2 u} du - \int_U^\infty e^{-x^2 u} du \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}U}^\infty e^{-v^2} dv \\ &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + o(1) \right) \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

于是

$$f(x) \sim \left[\frac{-2}{h''(a)} \right]^{\frac{1}{2}} g(a) e^{xh(a)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

这就是(32.5)。

証毕

§ 33 駐点的方法

現在研究一下当 $x \rightarrow \infty$ 时, 积分

$$f(x) = \int_a^b g(t) e^{txh(t)} dt \quad (33.1)$$

的情形。設 $h(t)$ 是实数值的函数。滿足 $h'(t)=0$ 的点 t 是它的駐点。积分 (33.1) 的值可以从区間端点的近傍和 $h(t)$ 的駐点的近傍去考虑。駐点的近傍所起的作用其实比区間端点的近傍的那一部分更为重要。

設 $g(t)$ 在 $a \leq t \leq b$ 中是連續有界变分函数, $h(t)$ 具有連續的二阶导函数, 并且

$$h'(\tau)=0, \quad h''(\tau)>0, \quad a<\tau<b. \quad (33.2)$$

对于其他的 t , 有 $h'(t) \neq 0$. 在 τ 的近傍, 令

$$h(t)-h(\tau)=u^2. \quad (33.3)$$

于是若取相当小的数 ε , $\varepsilon>0$, 則有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} g(t) e^{ixh(t)} dt + \int_{|t-\tau|>\varepsilon} g(t) e^{ixh(t)} dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (33.4)$$

現在先对 I_2 估計。

假設 $g(t)$ 是单調函数, 根据积分中值定理有

$$\begin{aligned} & \int_{\tau+\varepsilon}^b g(t) \cos xh(t) dt \\ &= g(b) \int_{\xi}^b \cos xh(t) dt, \quad \tau+\varepsilon < \xi < b, \\ &= g(b) \int_{h(\xi)}^{h(b)} \cos xv \frac{dv}{h'(t)} \\ &= g(b) \frac{1}{h'(\bar{b})} \int_{\eta}^{h(b)} \cos xv dv, \quad h(\xi) < \eta < h(b). \end{aligned}$$

(因为 $h(t)$ 单調, 令 $h(t)=v$ 即得。)

$$= \frac{g(b)}{h'(\bar{b})} \frac{1}{x} \left(\sin xv \right)_{\eta}^{h(b)} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样地有

$$\int_{\tau+\varepsilon}^b g(t) \sin(xh(t)) dt = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

又当 $g(t)$ 是有界变分函数时, 这个結果仍然成立, 即

$$\int_{\tau+\varepsilon}^b g(t) e^{ixh(t)} dt = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样地能够証明 $\int_a^{x-\varepsilon}$ 也为 $O(x^{-1})$. 故

$$I_2 = O(x^{-1}). \quad (33.5)$$

下面再討論积分 I_1 . 令 $h(t) - h(\tau) = u^2$, 則有

$$I_1 = \int_{-u_1}^{u_2} 2u \frac{g(t)}{h'(t)} \exp[ixh(t) + u^2] du,$$

这里

$$u_1 = [h(\tau - \varepsilon) - h(\tau)]^{1/2}, \quad u_2 = [h(\tau + \varepsilon) - h(\tau)]^{1/2}.$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{u}{h'(t)} &= \frac{(h(t) - h(\tau))^{1/2}}{h'(t) - h'(\tau)} \\ &= \frac{\left\{ (t - \tau)h'(\tau) + \frac{1}{2}(t - \tau)^2 h''(\xi_1) \right\}^{1/2}}{R(t - \tau)h''(\xi_2)} \\ &= \frac{\{h''(\xi_1)\}^{1/2}}{\sqrt{2}h''(\xi_2)} \quad (\xi_1 \text{ 与 } \xi_2 \text{ 都是 } \tau \text{ 与 } t \text{ 之間的数}), \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow \tau$ 时

$$\frac{u}{h'(t)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}h''(\tau)}.$$

于是

$$\frac{2ug(t)}{h'(t)} \rightarrow \left[\frac{2}{h''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau).$$

所以象討論 I_2 时那样, 容易証明

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{2}{h''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) \int_{u_1}^{u_2} \exp[ixu^2 + ixh(\tau)] du + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left[\frac{2}{h''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) e^{ixh(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu^2} du \\ &\quad + O \left[\left(\int_{u_1}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-u_2} \right) e^{ixu^2} du \right] + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left[\frac{2}{xh''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) e^{ixh(\tau)} e^{i\pi/4} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (33.6) \end{aligned}$$

但在此处用到了下面的公式:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu^2} du &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{ixu^2} du = 2 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ixu^2} du \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{A^2} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} e^{i\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}\quad (33.7)$$

这个公式将在下一节中证明。

由 (33.6) 及 (33.5) 就能写出下面的公式

$$f(x) = \left[\frac{2\pi}{xh''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) \exp \left[i \left(xh(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x} \right).$$

因为 \exp 项的绝对值等于 1, 所以我们可以把结果述说成为下面的定理。

定理 33.1 设 $g(t)$ 在 $a \leq t \leq b$ 中是有界变分函数, $h(t)$ 在同区间中具有二阶连续导函数。此外 (33.2) 成立, $h'(t) \neq 0$ (当 $t \neq \tau$ 时)。那末

$$f(x) \sim \left[\frac{2\pi}{xh''(\tau)} \right]^{1/2} g(\tau) \exp \left[i \left(xh(\tau) + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad x \rightarrow \infty. \quad (33.8)$$

再者上面的定理仅是函数在 $[a, b]$ 中具有唯一的驻点的情形, 如果它在 $[a, b]$ 中具有有限个驻点的话, 那么可以把区间适当的划分, 使得划分后在每个区间中仅有唯一的驻点, 从而可以考虑积分在各区间内的渐近式^①。

§ 34 定 积 分

这一节我们研究形如

$$\int_0^{\infty} e^{-(k+iu)x} x^{\mu-1} dx \quad (k > 0)$$

的以及和它有关的积分。

定理 34.1 设 $\mu > 0, k > 0, -\infty < u < \infty$, 则

^① 关于定理 33.1 的推广, 见 A. Erdélyi: Asymptotic expansions (Dover, 1956), 52.

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{\mu-1} e^{-iux} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(k+iu)^{\mu}}. \quad (34.1)$$

証明 設

$$I(X, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^X e^{-kx} x^{\mu-1} e^{-iux} dx,$$

并且令 $k+iu = \rho e^{i\theta}$. 因为 $k>0$, 所以

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

函数

$$\varphi(z) = e^{-kz} z^{\mu-1} e^{-iuz}$$

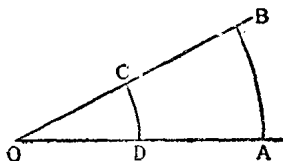


图 34.1

在图上区域 $ABCD$ 中是单值的解析

函数。这里 O 是原点, A 与 D 是实轴上的点, $OA=X$, $OD=\varepsilon$, $\angle AOB = -\theta$. 原点是函数 $\varphi(z)$ 的支点, 我們取在实轴上 $\varphi(x) = e^{-kx} x^{\mu-1} e^{-iux}$ 的这个分支。現在 A 就是 X , B 是 $Xe^{-i\theta}$, C 是 $\varepsilon e^{-i\theta}$, D 是 ε . AB, CD 分别是圆弧。于是根据 Cauchy 积分定理, 有

$$\begin{aligned} I(X, \varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^X \varphi(x) dx + \int_{DC} \varphi(z) dz + \int_{CB} \varphi(z) dz + \int_{BA} \varphi(z) dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

首先在 DC 弧上有 $z = \varepsilon e^{i\varphi}$ ($\varphi: 0 \sim -\theta$), 所以

$$I_1 = \varepsilon^{\mu} i \int_0^{-\theta} \exp(-\rho e^{i\theta} \cdot \varepsilon e^{i\varphi}) e^{i(\mu-1)\varphi} d\varphi.$$

于是

$$|I_1| \leq \varepsilon^{\mu} \left| \int_0^{-\theta} \exp[-\rho \varepsilon \cos(\theta + \varphi)] d\varphi \right| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (34.2)$$

其次, 同样地有

$$|I_3| \leq X^{\mu} \left| \int_0^{-\theta} \exp[-\rho X \cos(\theta + \varphi)] d\varphi \right|.$$

因 $0 < \theta + \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以有 η , 使得 $\cos(\theta + \varphi) \geq \eta > 0$. 于是

$$|I_3| \leq X^{\mu} \int_0^{|\theta|} e^{-\rho \eta X} d\varphi = X^{\mu} |\theta| e^{-\rho \eta X} \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow \infty),$$

即

$$I_2 \rightarrow 0. \quad (34.3)$$

由(34.2)及(34.3)就有

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} I(X, \varepsilon) &= \lim I_2 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, X \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^X \exp(-\rho e^{i\theta} y e^{-i\theta}) (y e^{-i\theta})^{\mu-1} e^{-i\theta} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, X \rightarrow \infty} e^{-i\theta \mu} \int_{\varepsilon}^X y^{\mu-1} e^{-\rho y} dy \\ &= \rho^{-\mu} e^{-i\theta \mu} \int_0^{\infty} e^{-w} w^{\mu-1} dw = (k + iu)^{-\mu} \Gamma(\mu). \end{aligned}$$

証毕

公式(34.1)说明了一个事实, 就是当 $x > 0$ 时等于

$$\sqrt{2\pi} e^{-kx} x^{\mu-1} \quad (x > 0)$$

而当 $x < 0$ 时等于零的函数的 Fourier 变换是 $\Gamma(\mu)/(k + iu)^\mu$.

(34.1)的结果可叙述如下。

定理 34.2 设 $\mu > 0, k > 0$, 则

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^U \frac{e^{iux}}{(k + iu)^\mu} du = \frac{2\pi}{\Gamma(\mu)} e^{-kx} x^{\mu-1}, \quad x > 0. \quad (34.4)$$

证明 这个公式由于定理 34.1 及反演公式定理 5.1 而明显地成立。当 $\mu > 1$ 的时候, 可以 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 代替 $\lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^U$.

把积分公式(34.1)分成实部及虚部, 就得到

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos ux \cdot x^{\mu-1} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(k^2 + u^2)^{\mu/2}} \cos\left(\mu \tan^{-1} \frac{u}{k}\right), \quad (34.5)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \sin ux \cdot x^{\mu-1} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(k^2 + u^2)^{\mu/2}} \sin\left(\mu \tan^{-1} \frac{u}{k}\right), \quad (34.6)$$

$$(k > 0, \mu > 0, -\infty < u < \infty).$$

现在讨论一下(34.1)当 $k \rightarrow 0$ 时的极限值。设

$$0 < \alpha < \frac{1}{\mu+1}, \quad 0 < \mu < 1,$$

于是根据积分学第二中值定理, 对于任意的 $A(>k^{-\alpha})$ (因为 $e^{-kx} x^{\mu-1}$ 对于 $x > (\mu+1)k^{-1}$ 是减函数, 由于 $\alpha < 1$, 而 k 相当的小,

所以可以认为当 $x > k^{-\alpha}$ 时函数是减函数), 有下面的结果:

$$\begin{aligned} & \int_{k^{-\alpha}}^1 e^{-kx} x^{\mu-1} \cos xu \, dx \\ &= \exp(-k^{1-\alpha}) k^{-\alpha(\mu-1)} \int_{k^{-\alpha}}^{\xi} \cos xu \, dx, \quad k^{-\alpha} < \xi < 1, \\ &= \exp(-k^{1-\alpha}) k^{-\alpha(\mu-1)} \left[\frac{\sin xu}{u} \right]_{k^{-\alpha}}^{\xi} \\ &= O(1) \cdot O(k^{(1-\mu)\alpha}) = o(1), \quad k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这里的估值对于所有的 A 是一样的, 所以

$$\int_{k^{-\alpha}}^{\infty} e^{-kx} x^{\mu-1} \cos xu \, dx = o(1). \quad (34.7)$$

现在再令

$$J = \int_0^{k^{-\alpha}} e^{-kx} x^{\mu-1} e^{-iux} \, dx - \int_0^{k^{-\alpha}} x^{\mu-1} e^{-iux} \, dx,$$

则有

$$\begin{aligned} |J| &\leq \int_0^{k^{-\alpha}} (1 - e^{-kx}) x^{\mu-1} \, dx \\ &\leq k \int_0^{k^{-\alpha}} x^{\mu} \, dx = \frac{k^{1-(\mu+1)\alpha}}{\mu+1} = o(1) \quad (k \rightarrow 0). \end{aligned}$$

(因为 $0 < \alpha < (\mu+1)^{-1}$.)

这样再考虑(34.7)就有

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{\mu-1} \cos xu \, dx - \int_0^{k^{-\alpha}} x^{\mu-1} \cos xu \, dx \rightarrow 0. \quad (34.8)$$

若是取 $0 < A < B$, 则有

$$\int_A^B x^{\mu-1} \cos xu \, dx = \left[\frac{\sin xu}{u} x^{\mu-1} \right]_A^B - \frac{\mu-1}{u} \int_A^B x^{\mu-2} \sin xu \, dx.$$

因为 $\mu < 1$, 所以右边的第一项当 $B \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$ 时收敛于零。又

因为 $\int_A^B x^{\mu-2} \, dx \rightarrow 0$, 所以积分

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos xu \, dx$$

收敛。故此在(34.8)中取 $k \rightarrow 0$, 则有

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos xu \, dx = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{\mu-1} \cos xu \, dx. \quad (34.9)$$

这个等式的右边是

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma(\mu) / (k + iu)^\mu,$$

令

$$(k + iu)^\mu = (k^2 + u^2)^{\mu/2} e^{i\theta\mu}, \quad \theta = \tan^{-1}(u/k).$$

当 $k \rightarrow 0$ 时, 由 $u > 0$, 就得到 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 于是 $(k + iu)^\mu \rightarrow u^\mu e^{i\mu\pi/2}$. 这

样, 由 (34.9) 就有

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{ixu} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{u^\mu} e^{-i\mu\frac{\pi}{2}} \quad (u > 0, 0 < \mu < 1). \quad (34.10)$$

由此式就能导出

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos xu \, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{u^\mu} \cos \frac{\pi\mu}{2}, \quad (34.11)$$

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin xu \, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{u^\mu} \sin \frac{\pi\mu}{2} \quad (34.12)$$

$$(u > 0, 0 < \mu < 1).$$

当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 因为 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, 所以有

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (34.13)$$

若是在上式中用 ux^2 代替 x , 则得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}, \quad u > 0, \quad (34.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tan(ux^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}, \quad u > 0, \quad (34.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad u > 0. \quad (34.16)$$

这些积分普通叫做 Fresnel 积分。

§ 35 数值积分

考虑求下面形式的积分

$$I = \int_a^b f(u) \cos xu \, du \quad (35.1)$$

的数值问题。当 x 相当大时, 因为 $\cos xu$ 急剧地在正负之间振动, 所以要用普通的方法, 譬如 Simpson 方法等求值, 就必须把区间分得非常细小, 并作非常麻烦的计算, 决不是能够简单地解决的。这里我们介绍一个计算这种类型积分的特殊方法, 这种方法是 Filton 找到的^①。

先把区间 (a, b) 分成 $2n$ 个等分, 即

$$b = a + 2nh.$$

$$\text{令} \quad xh = \theta, \quad a + sh = u_s, \quad f(a + sh) = f_s. \quad (35.2)$$

在区间 $(u_s - h, u_s + h)$ 即区间 (u_{s-1}, u_{s+1}) 中对 $f(u)$ 使用抛物线近似法计算, 就是取

$$g_s(u) = A + B(u - u_s) + C(u - u_s)^2,$$

并且要求 $g_s(u)$ 在 u_{s-1}, u_s, u_{s+1} 处与 $f(u)$ 相等, 这样地来决定 A, B, C , 就有

$$\left. \begin{aligned} A &= f_s, \\ B &= \frac{1}{2h} (f_{s+1} - f_{s-1}), \\ C &= \frac{1}{2h^2} (f_{s+1} + f_{s-1} - 2f_s). \end{aligned} \right\} \quad (35.3)$$

把 $g_s(u)$ 微分, 并令 $u = u_{s+1}, u_{s-1}$, 就有

$$\begin{aligned} g'_s(u_{s+1}) &= B + 2C(u - u_s) = \frac{1}{2h} (3f_{s+1} + f_{s-1} - 4f_s), \\ g'_s(u_{s-1}) &= \frac{1}{2h} (4f_s - f_{s+1} - 3f_{s-1}). \end{aligned} \quad (35.4)$$

现在令

$$I_s = \int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} f(u) \cos xu \, du.$$

① 参看 L. N. G. Filton: Proc. Roy. Soc. Edin. XLIX (1928~1929).
又见 C. J. Tranter: Integral transforms in math. phys., 2nd. ed. (1955).

我們先試求积分

$$I_s^* = \int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} g_s(u) \cos xu \, du.$$

根据分部积分法有

$$\begin{aligned} I_s^* &= \left[g_s(u) x^{-1} \sin xu \right]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} - \frac{1}{x} \int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} g'_s(u) \sin xu \, du \\ &= \frac{1}{x} \left[g_s(u) \sin xu + g'_s(u) x^{-1} \cos xu \right]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} \\ &\quad - \frac{1}{x^2} \int_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} g''_s(u) \cos xu \, du. \end{aligned}$$

因为 $g'_s(u) = 2C$, 故此

$$xI_s^* = \left[\{g_s(u) - 2Cx^{-2}\} \sin xu + g'_s(u) x^{-1} \cos xu \right]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}}. \quad (35.5)$$

把(35.3)中 C 的值代入, 并且考虑

$$\sin xu_{s+1} = \sin x(u_s + h) = \sin xu_s \cos \theta + \cos xu_s \sin \theta,$$

$$\sin xu_{s-1} = \sin x(u_s - h) = \sin xu_s \cos \theta - \cos xu_s \sin \theta,$$

就得

$$\begin{aligned} \left[\{g_s(u) - 2Cx^{-2}\} \sin xu \right]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} &= (f_{s+1} - f_{s-1}) \sin xu_s \cos \theta \\ &\quad + \{(1 - 2\theta^{-2})(f_{s+1} + f_{s-1}) + 4\theta^{-2}f_s\} \cos xu_s \sin \theta. \end{aligned}$$

同样地

$$\begin{aligned} \left[g'_s(u) x^{-1} \cos xu \right]_{u_{s-1}}^{u_{s+1}} &= 2\theta^{-1}(f_{s+1} + f_{s-1} - 2f_s) \cos xu_s \cos \theta \\ &\quad - \theta^{-1}(f_{s+1} - f_{s-1}) \sin xu_s \sin \theta. \end{aligned}$$

把两式相加, 就有

$$\begin{aligned} x\theta I_s^* &= (f_{s+1} - f_{s-1})(\theta \cos \theta - \sin \theta) \sin xu_s \\ &\quad + (f_{s+1} + f_{s-1})(\theta \sin \theta - 2\theta^{-1} \sin \theta + 2 \cos \theta) \cos xu_s \\ &\quad + 4f_s(\theta^{-1} \sin \theta - \cos \theta) \cos xu_s. \end{aligned}$$

由于 $xu_s = xu_{s+1} - \theta$, 所以这个式子中 f_{s+1} 的系数是

$$\begin{aligned} &(\theta \cos \theta - \sin \theta) \sin(xu_{s+1} - \theta) \\ &+ (\theta \sin \theta - 2\theta^{-1} \sin \theta + 2 \cos \theta) \cos(xu_{s+1} - \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\theta \sin \theta \cos \theta - 2\theta^{-1} \sin \theta \cos \theta + 2 \cos^3 \theta - \theta \sin \theta \cos \theta \\
&\quad + \sin^2 \theta) \cos xu_{s+1} + (\theta \cos^3 \theta - \sin \theta \cos \theta + \theta \sin^2 \theta \\
&\quad - 2\theta^{-1} \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta) \sin xu_{s+1} \\
&= (1 + \cos^2 \theta - 2\theta^{-1} \sin \theta \cos \theta) \cos xu_{s+1} \\
&\quad + (\theta + \sin \theta \cos \theta - 2\theta^{-1} \sin^2 \theta) \sin xu_{s+1}.
\end{aligned}$$

同样地, 利用 $xu_s = xu_{s-1} + \theta$, 可以得到 f_{s-1} 的系数是

$$\begin{aligned}
&(1 + \cos^2 \theta - 2\theta^{-1} \sin \theta \cos \theta) \cos xu_{s-1} \\
&\quad - (\theta + \sin \theta \cos \theta - 2\theta^{-1} \sin^2 \theta) \sin xu_{s-1}.
\end{aligned}$$

于是, 如果令

$$\left. \begin{aligned}
\alpha &= \theta^{-3} (\theta^2 + \theta \sin \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta), \\
\beta &= 2\theta^{-3} [\theta (1 + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta], \\
\gamma &= 4\theta^{-3} (\sin \theta - \theta \cos \theta),
\end{aligned} \right\} \quad (35.6)$$

则由于 $h = \theta/x$, 能够有下面的公式:

$$\begin{aligned}
I_s^* &= h [\alpha (f_{s+1} \sin xu_{s+1} - f_{s-1} \sin xu_{s-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta (f_{s+1} \cos xu_{s+1} + f_{s-1} \cos xu_{s-1}) + \gamma f_s \cos xu_s].
\end{aligned}$$

现在令 $s=1, 3, 5, \dots, 2n-1$, 并且把这些 I_s^* 相加, 就得到总和

$$h [\alpha \{f(b) \sin xb - f(a) \sin xa\} + \beta C_{2n} + \gamma C_{2n-1}].$$

其中 $C_{2n} = \frac{1}{2} f_0 \cos xa + f_2 \cos xu_2 + f_4 \cos xu_4 + \dots$

$$+ f_{2n-2} \cos xu_{2n-2} + \frac{1}{2} f_{2n} \cos xb. \quad (35.7)$$

$$C_{2n-1} = f_1 \cos xu_1 + f_3 \cos xu_3 + \dots + f_{2n-1} \cos xu_{2n-1}. \quad (35.8)$$

上面的公式显然就是 I_3 的和, 也就可以看成是积分

$$\int_a^b f(u) \cos xu \, du$$

的近似值。这样就得到了下面的定理。

定理 35.1 成立着近似公式

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(u) \cos xu \, du &= h [\alpha \{f(b) \sin xb - f(a) \sin xa\} \\
&\quad + \beta C_{2n} + \gamma C_{2n-1}].
\end{aligned} \quad (35.9)$$

这里的 C_{2s}, C_{2s-1} 分别如公式 (35.7) 和 (35.8), α, β, γ 如公式 (35.6), 此外 $b-a=2nh$.

注意 若是 $x \rightarrow 0$, 则 $\theta \rightarrow 0$, (35.9) 就成为

$$\int_a^b f(u) du = \frac{h}{3} (2C_{2s} + 4C_{2s-1}),$$

这就是 Simpson 公式. α, β, γ 的值见表 35.1. (Filton)

表 35.1

θ	α	β	γ
0.0	0.00000	0.66667	1.33333
0.025	0.00000	0.66675	1.33325
0.05	0.00001	0.66700	1.33300
0.10	0.00004	0.66800	1.33200
0.15	0.00015	0.66965	1.33034
0.20	0.00035	0.67194	1.32801
0.25	0.00069	0.67485	1.32502
0.30	0.00118	0.67836	1.32137
0.40	0.00278	0.68704	1.31212
0.50	0.00536	0.69769	1.30030
0.75	0.01730	0.73022	1.25982
1.00	0.03850	0.76526	1.20467
1.50	0.10840	0.80971	1.05646

第7章 表現問題与調和分析

§ 36 使用 Fourier 积分的表現

設 $F(t)$ 是定义于 $(-\infty, \infty)$ 中的函数, 我們来求这个函数能够表現成为

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} f(x) dx, \quad (36.1)$$

或是

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} dG(x) \quad (36.2)$$

的充要条件。这里 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $G(x)$ 是有界变分函数。若是 $F(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, 那么根据 L_2 -Fourier 变换的反演公式, 这个问题明显地可以归结为求 (逆) Fourier 变换的问题。故此现在仅考虑 (36.1) 中当 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ 的情形。

設 $s(t)$ 是满足下面 (36.3) ~ (36.6) 这些条件的函数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < M \quad (M: \text{常数}), \quad (36.3)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} K(x) dx, \quad (36.4)$$

其中 $K(x)$ 是非負偶函数 (实函数值), 并且当 $|x| \rightarrow \infty$ 时,

$$K(x) = O(|x|^{-1-\alpha}), \quad \alpha > 0. \quad (36.5)$$

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1. \quad (36.6)$$

这样的 $s(t)$, 譬如可以取成 $D_2(t)$: $D_2(t) = 0$ ($|t| \geq 2$), $D_2(t) = 1 - \frac{|t|}{2}$ ($|t| \leq 2$). 另外根据 (36.3) 与 (36.4) 有

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} s(t) dt \quad (\text{对于几乎所有的 } x), \quad (36.7)$$

这个公式成立的理由如下:首先右边的积分绝对收敛,另外根据定理 11.1, 有

$$(C, 1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} s(t) dt = K(x) \quad (\text{对于几乎所有的 } x).$$

于是(36.7)右边积分的值,几乎处处都等于 $K(x)$.

由于(36.7), 我們不妨认为 $K(x)$ 是連續而且有界的。現在我們作

$$f(n, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} s\left(\frac{t}{n}\right) F(t) dt, \quad (36.8)$$

因为 $F(t)$ 有界, 所以右边的积分绝对收敛。

定理 36.1 有界函数 $F(t)$ 可以用 (36.1) 表現的充分必要条件[其中 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$]是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x)| dx \leq M, \quad n=1, 2, \dots, \quad (36.9)$$

并且, 对于已給的 ε , 存在着这样的 δ , $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得对于任意一个测度小于 δ 的集合 S , 恒有

$$\int_S |f(n, x)| dx \leq \varepsilon. \quad (36.10)$$

証明 (i) 条件是必要的。若是(36.1)成立, 則

$$\begin{aligned} f(n, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} s\left(\frac{t}{n}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-y)} s\left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itn(x-y)} s(t) dt \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} K(n(x-y)) f(y) dy. \end{aligned} \quad (36.11)$$

于是

$$|f(n, x)| \leq n \int_{-\infty}^{\infty} K(n(x-y)) |f(y)| dy,$$

并且

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x)| dx &\leq n \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(n(x-y)) |f(y)| dy \\
&= n \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} K(n(x-y)) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy. \quad (36.12)
\end{aligned}$$

把最右边取成 M 后, 就得到 (36.9)。

其次, 设 $f(y) = f_1(y) + if_2(y)$, 并令

$$f_i(n, x) = n \int_{-\infty}^{\infty} K(n(x-y)) f_i(y) dy \quad (i=1, 2),$$

根据定理 10.1, 对于几乎所有的 x , $f_i(n, x)$ 收敛于 $f_i(x)$. 所以不妨设 $f_i(x) \geq 0$, 因为若不是这样的话, 那么令 $f_i(x) = f_i^+(x) - f_i^-(x)$ ($f_i^+ \geq 0, f_i^- \geq 0$), 而同样地定义 $f_i^+(n, x)$ 和 $f_i^-(n, x)$ 即可。于是 (36.12) 就可以写成下面的等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(n, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) dx = J_i \quad (i=1, 2).$$

现在令
$$H_i(n, x) = \int_{-\infty}^x f_i(n, x) dx,$$

因为 $H_i(n, x)$ 是非减函数, 所以 $H_i(n, \infty) = J_i$ (与 n 无关系)。又因为 $f_i(n, x) \rightarrow f_i(x)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_i(n, x) = H_i(x).$$

再取这样的 x_0 , 使得当 $x \geq x_0$ 时,

$$H_i(x) \geq J_i - \frac{1}{2} \varepsilon,$$

以及这样的 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时,

$$|H_i(n, x_0) - H_i(x_0)| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

于是当 $n \geq n_0$ 及 $x \geq x_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
0 &\leq J_i - H_i(n, x) \leq J_i - H_i(n, x_0) \\
&\leq J_i - H_i(x_0) + H_i(x_0) - H_i(n, x_0) \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon.
\end{aligned}$$

同样地决定 n_1 和 x_0 , 使得当 $n \geq n_1, x \leq -x_0$ 时, 有

$$0 \leq H_i(n, x) \leq \varepsilon.$$

然后再把区間 $(\varepsilon_1, J - \varepsilon)$ m 等分, 使得每一个分区間的长度不超过

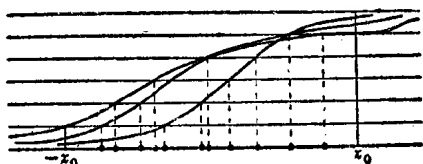


图 36.1

ε . 設 N 条曲綫 $y = H_i(n, x)$, $n \leq N$ ($N = \max(n_0, n_1)$), 与 m 条和 x -軸平行的直綫 $y = \varepsilon + k \frac{J_i - 2\varepsilon}{m}$

($k=1, 2, \dots, m$) 相交, 交

点的 x 坐标是 x_1, x_2, \dots (不超过 Nm 个). 如果令 $x_{j+1} - x_j$ 的的最小值是 $\delta_i(\varepsilon)$, 則当 $|x - x'| < \delta_i$ 时, 明显地成立

$$|H_i(n, x) - H_i(n, x')| < \varepsilon.$$

于是設 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $mS < \delta$ (mS 是集合 S 的測度), 則

$$\int_S f_i(n, x) dx < \varepsilon \quad (i=1, 2).$$

所以 $H_i(n, x)$ 是一致地絕对連續的, 也就是說积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x)| dx$$

一致地絕对連續, 即(36.10)成立。

(ii) 条件的充分性。由于公式(36.8), 以及关于 $f(n, x)$ 可积分性的(36.9), 就有

$$s\left(\frac{t}{n}\right) F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(n, x) e^{itx} dx \quad (\text{对于几乎所有的 } t). \quad (36.13)$$

由于右边明显地是連續的, 所以可把 $F(t)$ 考虑成为連續函数。[正确地說, 存在着一个連續函数 $F^*(t)$, 对于几乎所有的 t , $F(t)$ 与 $F^*(t)$ 一致, 故我們可以代替 $F(t)$ 而考虑 $F^*(t)$.] $s(t)$ 根据(36.4)是連續的。如在(36.13)中取 $n \rightarrow \infty$, 則可以看到公式的左边在任意的有限区間中一致收敛于 $F(t)$ 。

現在一方面由于(36.9), 函数

$$H(n, x) = \int_{-\infty}^x f(n, \xi) d\xi$$

在 $(-\infty, \infty)$ 中一致地是有界变分函数。于是有这样一个数列 n_1, n_2, \dots , 使得极限函数

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(n_k, x) = H(x) \quad (36.14)$$

存在, 而 $H(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中仍是有界变分函数。因此积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(n_k, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(n_k, x)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 在任意的有限区间中一致收敛于积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(x)$ 。

这个事实可以由 $H(n_k, -\infty) = 0$, $H(n_k, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 及定理 18.3 証得。于是有

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(x).$$

此外, 根据假设 (36.11), $H_n(x)$ 是一致連續的, 所以 $H(x)$ 也是一致連續的, 即存在着 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 使得

$$H(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi.$$

因此

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx. \quad \text{証毕}$$

定理 36.1 是由 Cramér 和 Dominguez 所得到的^①。

現在我們簡略地討論一下定理 36.1 的特殊情形。如果令

$$s(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

那么只要假定 $F(t)$ 在任意有限区间中的可积分性就够了, 而不必

① Cramér 不用条件 (36.9) 而使用下面的条件 (36.15) 証明了定理。見 H. Cramér: Trans. Amer. Math. Soc., 46(1939), A. G. Dominguez: Duke Math. Journal 6 (1940).

再假定它是有界的。这样就包括了下面的結果：

定理 36.20 設函数 $F(t)$ 在任意的有限区間上可积分, 并且满足条件(36.9)及(36.10), 則

$$F(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|x|}{A}\right) e^{itz} f(x) dx.$$

定理 36.3 定理 36.1 中的条件(36.10)可以改換成

$$\lim_{n, n' \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x) - f(n', x)| dx = 0. \quad (36.15)$$

証明 (36.15)是必要的。因为

$$f(n, x) - f(x) = n \int_{-\infty}^{\infty} K(nz) [f(x-z) - f(x)] dz.$$

所以

$$|f(n, x) - f(x)| \leq n \int_{-\infty}^{\infty} K(nz) |f(x-z) - f(x)| dz.$$

因此

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x) - f(x)| dx \\ & \leq n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-z) - f(x)| dx \right] K(nz) dz. \end{aligned} \quad (36.16)$$

但是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-z) - f(x)| dx = \varphi(z)$$

是有界而連續的函数, 并且 $\varphi(0) = 0$, 所以根据定理 8.1, (36.16)的右边当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于零, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

由这个公式就能得到(36.15)。

(36.15)是充分的。和定理 36.1 的証明一样, 有

$$H(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(n_k, x) dx. \quad (36.17)$$

由(36.15)可以知道, 存在着这样一个函数 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, 使得

① 这个定理是由 A. C. Offord 得到的。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(n_k, x)| dx = 0.$$

于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(n_k, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi,$$

因此, 对于几乎所有的 x 成立着

$$H(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi.$$

这样, 由上式就能导出定理 36.1 的结论。

証毕

另外在定理 36.1 的证明中还包含有下面的定理。

定理 36.4 有界函数 $F(t)$ 可以用 (36.2) 表现 [其中 $G(x)$ 是在 $(-\infty, \infty)$ 中的有界变分函数] 的充分和必要条件是存在着与 n 无关的数 M , 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(n, x)| dx < M. \quad (36.18)$$

最后举几个关于 $s(t)$ 与 $K(x)$ 的例子。

$s(t),$	$K(x)$
$e^{-t^2/2},$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
$e^{- t },$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$1 - t \quad (t \leq 1)$	$\frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$
$0 \quad (t \geq 1),$	

§ 37 使用 Fourier-Stieltjes 积分的表现

在本节中考虑 $f(t)$ 可以表现为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (37.1)$$

的条件, 其中 $F(x)$ 是单调增函数。

和前节一样, 假设 $s(t)$ 满足 (36.3), (36.4), (36.5), (36.7), 并令

$$F(n, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} s\left(\frac{t}{n}\right) f(t) dt. \quad (37.2)$$

这样就得到下面的定理。

定理 37.10 如果 $f(t)$ 是有界的連續函数, 那么它可以用 (37.1) 表現的充分必要条件是

$$F'(n, x) \geq 0, \quad (37.3)$$

这里 $F'(x)$ 是有界的單調增函数。

証明 条件的必要性。如果 (37.1) 成立的話, 那么

$$\begin{aligned} F(n, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} s\left(\frac{t}{n}\right) dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} dF(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dF(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-y)} s\left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} K(n(x-y)) dF(y). \end{aligned}$$

最后的式子, 因为 $K(x) \geq 0$, 所以不可能取負的值。

現在証明条件的充分性。因为

$$\int_{-2A}^{2A} \left(1 - \frac{|x|}{2A}\right) e^{-itx} dx = 2A \left(\frac{\sin At}{At}\right)^2,$$

把方程的两边乘以 $(2\pi)^{-1} s\left(\frac{t}{n}\right) f(t)$, 然后再积分, 就有

$$\begin{aligned} \int_{-2A}^{2A} \left(1 - \frac{|x|}{2A}\right) F(n, x) dx \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 s\left(\frac{t}{nA}\right) f\left(\frac{t}{A}\right) dt. \end{aligned} \quad (37.4)$$

$|s(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$. 又 $f(t)$ 有界, 故可設 $|f(t)| \leq M$. 所以

(37.4) 的右边不可能超过 $M \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = M$, 因此有

$$\int_{-2A}^{2A} \left(1 - \frac{|x|}{2A}\right) F(n, x) dx \leq M.$$

① H. Cramér: On the representation of a function by certain Fourier integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 46 (1936).

于是由(37.3)有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{-A}^A F(n, x) dx &\leq \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|x|}{2A}\right) F(n, x) dx \\ &\leq \int_{-2A}^{2A} \left(1 - \frac{|x|}{2A}\right) F(n, x) dx \leq M.\end{aligned}$$

即 $\int_{-\infty}^{\infty} F(n, x) dx \leq 2M$. 这就意味着 $F(n, x) \in L_1(-\infty, \infty)$.

于是由(37.2)有

$$s\left(\frac{t}{n}\right)f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F(n, x) dx. \quad (37.5)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 方程的左边趋于 $f(t)$. 右边可以看成是

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(\int_{-\infty}^x F(n, y) dy\right),$$

而这个式子当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛 $\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(n, y) dy = f(0) \text{ 与 } n \text{ 无关}\right]$, 所

以根据定理 18.2, 积分 $\int_{-\infty}^x F(n, y) dy$ 收敛于一个单调函数 $F(x)$,

因此在(37.5)中取 $n \rightarrow \infty$, 就得到

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x). \quad \text{证毕}$$

下面叙述一个和上面同类型的定理。

定理 37.2① 設 $f(x)$ 是連續函数, $f(0) = M$, 并且存在着 R_0 , 使得对所有的 x 及 $R \geq R_0$ 有

$$\int_{-R}^R f(t) e^{-itx} dt \geq 0, \quad (37.6)$$

那么 $f(t)$ 能用 (37.1) 表现。此外, 若 $f(t)$ 是具有上述性质的函数序列在任意有限区间中一致收敛的极限函数, 则它也能用 (37.1) 式表现。并且有 $F(\infty) - F(-\infty) = C$. 反过来, 对于可以用 (37.1) 表现的函数 $f(t)$, 一定存在着这样的 R_0 , 使得当 $R \geq R_0$ 时 (37.6) 成立, 或者 $f(t)$ 是一个具有这种性质的函数序列在任意

① 河田龙夫: Representation of a function by the Fourier-Stieltjes integral, Ann. Inst. Stat. Math., I (1950).

有限区間中的极限函数。

証明 先証明定理的前半部。令

$$f_R(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leq R, \\ 0, & |t| > R, \end{cases}$$

則 f_R 在区間 $(-R, R)$ 中为連續函数, 于是根据定理 11.1, 有

$$f_R(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|u|}{A}\right) e^{-ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-itx} dt. \quad (37.7)$$

此外由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-itx} dt = \int_{-R}^R f(t) e^{-itx} dt \geq 0 \quad (R \geq R_0),$$

所以

$$\begin{aligned} f_R(0) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|u|}{A}\right) du \int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-itx} dt \\ &\geq \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left(1 - \frac{u}{A}\right) du \int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-itx} dt \\ &\geq \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-itx} dt. \end{aligned}$$

因此函数 $\varphi_R(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-ity} dt \in L_1(-\infty, \infty)$. 而积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} f_R(t) e^{-itx} dt$$

是存在的。这样, 根据 (37.7) 它应该等于 $f_R(t)$. 即

$$\begin{aligned} f_R(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_R(u) e^{ixu} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dF_R(u). \end{aligned}$$

这里 $F_R(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^u \varphi_R(y) dy$, $F_R(\infty) - F_R(-\infty) = f_R(0) = f(0) = M$.

因为当 $R \rightarrow \infty$ 时, $f_R(t)$ 在任意的有限区間中一致收敛于函数 $f(t)$, 所以根据定理 18.2, $F_R(u)$ 收敛于一个有界单调函数 $F(u)$, ($F(a) - F(-\infty) = M$). 因此成立

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dF(u). \quad (37.8)$$

此外,对于这种性质的函数在任意有限区间的极限函数,重复地应用定理 37.2, 就可以证明,极限函数也能用(37.8)的形式表现。

下面证明定理的后半部。

现在假设(37.8)成立。令

$$\varphi_A(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{A}, & |t| \leq A, \\ 0, & |t| \geq A, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \varphi_A(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(Au/2)}{Au^2/2} e^{itu} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} dF_A(u), \end{aligned}$$

这里

$$F_A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^u \frac{\sin^2(Av/2)}{Av^2/2} dv, \quad F_A(+\infty) - F_A(-\infty) = 1.$$

明显地有下面的结果

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_A(x-u) dF(u) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_A(x-u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dF(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-u)t} dF_A(x-u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dF(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} dF_A(v) = f(t) \varphi_A(t). \end{aligned}$$

因为 $\varphi_A(t)f(t)$ 在任意有限区间中当 $R \rightarrow \infty$ 时一致收敛于 $f(t)$, 所以把 A 取成 R_0 , 当 $R \geq A$ 时, 只要证明

$$\int_{-R}^R e^{-ixt} \varphi_A(t) f(t) dt \geq 0 \quad (37.9)$$

即可。事实上,

$$\int_{-R}^R e^{-ixt} \varphi_A(t) f(t) dt = \int_{-A}^A e^{-ixt} \left(1 - \frac{|t|}{A} \right) f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dF(u) \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|t|}{A}\right) e^{-it(x-u)} du \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(A(x-u)/2)}{A(x-u)^2/2} dF(u) \geq 0.
\end{aligned}$$

于是(87.9)得証。

証毕

在講定理 37.3 以前,我們先介紹一个名詞。設 $f(t)$ 在 $-\infty < t < \infty$ 中連續。若对任何一个只在有限区間中不等于零的可积函数 $q(x)$ 恒有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) q(x) \overline{q(y)} dx dy \geq 0, \quad (87.10)$$

那么就称 $f(t)$ 为正值函数。积分(87.10)的积分区域,实际上只是有限的正方形。

定理 37.3 $f(t)$ 为正值函数的充分必要条件是, $f(t)$ 可以用公式(87.1)表現。

証明 条件是充分的。若是(87.1)成立,那么

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) q(x) \overline{q(y)} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)u} dF(u) \right) q(x) \overline{q(y)} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dF(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} q(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyu} \overline{q(y)} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |Q(u)|^2 dF(u) \geq 0,
\end{aligned}$$

这里

$$Q(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} q(x) dx.$$

条件是必要的。設公式(87.10)成立。現在特別取 $q(x)$ 如下,

$$q(x) = \begin{cases} A^{-1/2} e^{-ixt}, & 0 \leq x \leq A, \\ 0, & x < 0, \quad x > A. \end{cases}$$

于是(87.10)就化成了下面的形式:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{A} \int_0^A \int_0^A f(x-y) e^{-i(x-y)t} dx dy \\
&= \frac{1}{A} \int_0^A dy \int_0^{A-y} f(u) e^{-iut} du \\
&= \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|u|}{A}\right) f(u) e^{-iut} du.
\end{aligned} \tag{37.11}$$

現在令

$$f(t, A) = \begin{cases} f(t) \left(1 - \frac{|t|}{A}\right), & |t| \leq A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases}$$

由于(37.11), 当 $R \geq A$ 时, 有

$$\int_{-R}^R f(t, A) e^{-iut} dt \geq 0.$$

因此 $f(t)$ 是函数 $f(t, A)$ 在任意有限区間中所一致收斂的极限函数, 据定理 37.2, $f(t)$ 可以用(37.1)来表現。証毕

§ 38 一般調和分析

对于已給的 $f(t)$, 設

$$\varphi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \tag{38.1}$$

关于 x 在任意的有限区間中是一致存在的, 并且

$$\varphi(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt. \tag{38.2}$$

由于 $|\varphi(x)| \leq \varphi(0)$, 所以 $\varphi(x)$ 有界。把 $f(t)$ 看作是随時間变动而变化的函数, 那么(38.1)就是函数在時間 t 的值与在時間 $x+t$ 的值的积对于時間的平均值。这个值可以看作是在 $x+t$ 及 t 处, 函数的自身的相关系数。我們現在証明, $\varphi(x)$ 可以用 Fourier-Stieltjes 积分来表現。換一句話說, 就是可以对它进行調和分析。

設

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < A, \\ 0, & |x| \geq A. \end{cases} \tag{38.3}$$

$$\text{令} \quad \varphi_A(x) = \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x+t) \overline{f_A(t)} dt, \quad (38.4)$$

$$\text{則} \quad |\varphi_A(x)| \leq \varphi_A(0). \quad (38.5)$$

又在任意的有限区間中,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \varphi_A(x) = \varphi(x) \quad (38.6)$$

是一致收斂的。这里 $\varphi(x)$ 是 (38.1) 所定义的函数。現在先对后两个断語加以証明。因为

$$\begin{aligned} |\varphi_A(x)| &= \frac{1}{2A} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x+t) \overline{f_A(t)} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_A(x+t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_A(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} |f_A(t)|^2 dt = \varphi_A(0). \end{aligned}$$

这就是不等式 (38.5)。当 $x > 0$ 时, 我們有

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A-x} f(x+t) \overline{f(t)} dt \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(x+t) \overline{f(t)} dt - \frac{1}{2A} \int_{A-x}^A f(x+t) \overline{f(t)} dt. \end{aligned} \quad (38.7)$$

又

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2A} \left| \int_{A-x}^A f(x+t) \overline{f(t)} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2A} \left(\int_A^{A+x} |f(x)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{A-x}^A |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2A} \int_{A-x}^{A+x} |f(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (38.8)$$

可是积分

$$\frac{1}{2(A+x)} \int_{-A-x}^{A+x} |f(t)|^2 dt$$

当 $A \rightarrow \infty$ 时, 根据假設應該收斂于 $\varphi(0)$, 于是

$$\frac{1}{2A} \int_{-A-x}^{A+x} |f(t)|^2 dt \rightarrow \varphi(0). \quad (\text{在 } x \text{ 的有限区間中一致收斂。})$$

同样地

$$\frac{1}{2A} \int_{-A+x}^{A-x} |f(t)|^2 dt \rightarrow \varphi(0). \quad (\text{在 } x \text{ 的有限区間中一致收斂。})$$

于是

$$\frac{1}{2A} \int_{A-x}^{A+x} |f(t)|^2 dt + \frac{1}{2A} \int_{-A-x}^{-A+x} |f(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

因此 (38.8) 的右边, 当 $A \rightarrow \infty$ 时, 对于任意有限区間中的 x 一致地收斂于零。于是

$$\frac{1}{2A} \int_{A-x}^A f(x+t) \overline{f(t)} dt \rightarrow 0. \quad (\text{在 } x \text{ 的有限区間中一致收斂。})$$

同样地, 如果令 $x < 0$, 这样的关系仍然成立。于是 (38.7) 右边的第二項收斂于零, 而第一項收斂于 $\varphi(x)$ 。所以由 (38.7) 就得到了 (38.6)。

若 $q(x)$ 是只在任意有限区間中异于零的可积函数, 則

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_A(x-y) q(x) \overline{q(y)} dx dy \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x-y+t) \overline{f_A(t)} dt \cdot q(x) \overline{q(y)} dx dy \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \overline{q(y)} dx dy \int_{-\infty}^{\infty} f_A(x+t) \overline{f_A(y+t)} dt \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \overline{q(y)} f_A(x+t) \overline{f_A(y+t)} dx dy \right) dt \\ &= \frac{1}{2A} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} q(x) f_A(x+t) dx \right|^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

于是根据定理 37.3 就知道存在着非减有界函数 $\sigma_A(y)$, 使得

$$\varphi_A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} d\sigma_A(y). \quad (38.9)$$

这样, 再根据定理 18.2, 就存在一个非减函数 $\sigma(y)$, 使得

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} d\sigma(y). \quad (38.10)$$

这样就得到了下面的定理。

定理 38.1 設 $f(t)$ 是(38.1)中的函数, $\varphi(x)$ 是用(38.1)定义的函数, 则存在一个非减函数 $\sigma(y)$, 使得(38.10)成立。

定理 38.2 在上面定理的假設下, 有

$$\sigma(y) - \sigma(0) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{1 - e^{-ixt}}{ix} \varphi(x) dx. \quad (38.11)$$

其中 $\sigma(y) = \frac{1}{2} \{ \sigma(y+0) + \sigma(y-0) \}$. 此外有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(x) e^{-ixy} dx = \sigma(y+0) - \sigma(y-0). \quad (38.12)$$

这个定理是定理 38.1, 定理 17.2, 定理 16.2 的直接結果。

第8章 結合函数及各种变换

§ 39 符号解法与結合函数^①

在 § 6 中已經講过关于两个函数的結合函数。設 $f(x)$, $g(x)$ 是两个已知函数, 并設

$$f = \phi * g, \text{ 即 } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)g(y)dy.$$

現在我們討論一下如何求函数 $\phi(x)$ 的問題。为了这个目的, 我們用符号解法来談是比較便利的。設 D 代表对 x 微分的运算符号。我們把 D 設想成为数, 并且形式地考慮函数 e^{aD} 的展开式, 就有

$$e^{aD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k D^k}{k!}.$$

由此就有下面的展开形式:

$$e^{aD}\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k D^k \phi(x)}{k!}.$$

这里如果令 $D^k \phi(x) = \phi^{(k)}(x)$, 則有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \phi^{(k)}(x)}{k!}.$$

若 $\phi(x)$ 是正則的, 那么根据 MacLaurin 的展开公式, 它恰好等于 $\phi(x+a)$. 于是可以定义

$$e^{aD}\phi(x) = \phi(x+a). \quad (39.1)$$

假如 $\phi(x)$ 不可微分的话, 那么就把 (39.1) 看作是 $e^{aD}\phi(x)$ 的定义。

^① 本章討論的内容, 見 D. V. Widder: The convolution transform, Bull. Amer. Math. Soc. (1954); I. I. Hirschman-D. V. Widder: The convolution transform (Princeton Univ. Press, 1955).

現在我們用符号解法来解微分方程

$$f(x) - f'(x) = \phi(x). \quad (39.2)$$

使用 D 后, 方程就化成了

$$(1-D)f(x) = \phi(x),$$

因而形式地得到

$$f(x) = \frac{1}{1-D} \phi(x). \quad (39.3)$$

現在我們来規定 $1/(1-D)$ 的意义。設

$$g(y) = \begin{cases} e^y, & -\infty < y < 0, \\ 0, & y > 0, \end{cases} \quad (39.4)$$

并設 $x < 1$, 則有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} g(y) dy = \int_{-\infty}^0 e^{(-x+1)y} dy = \frac{1}{1-x}.$$

于是把 x 代成 D , 就有

$$\frac{1}{1-D} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yD} g(y) dy,$$

因此

$$\frac{1}{1-D} \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yD} \phi(x) \cdot g(y) dy.$$

应用(39.1), 就有

$$\frac{1}{1-D} \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y) g(y) dy = \phi * g.$$

所以由(39.3)就得到

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y) g(y) dy. \quad (39.5)$$

这样, 我們有理由猜想, 函数 $f(x)$ 就是(39.2)的解。事实上, (39.5)意味着

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 \phi(x-y) e^y dy = e^x \int_x^{\infty} \phi(u) e^{-u} du.$$

这里要假設 $\phi(u) e^{-u} \in L(a, \infty)$ (a 任意的有限数)。把两边微分后, 就有

$$f'(x) = e^x \int_x^\infty \phi(u) e^{-u} du - \phi(x).$$

所以

$$f'(x) = f(x) - \phi(x).$$

即(39.2)式确实成立。

現在我們考慮一般的微分方程

$$E(D)f(x) = \phi(x) \quad (39.6)$$

的解的求法。为了这个目的，我們試求 $G(t)$ ，使得它能滿足

$$\frac{1}{E(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} G(t) dt.$$

如果得到了 $G(t)$ 以后，那么(39.6)的解就可以猜想是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{E(D)} \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tD} \phi(x) G(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) G(t) dt. \end{aligned} \quad (39.7)$$

先举几个这样的例。

例 1 由于

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-st} dt = \frac{1}{1-s^2}, \quad -1 < \Re s < 1,$$

所以关于方程

$$(1-D^2)f(x) = \phi(x), \quad \text{即 } f(x) - f''(x) = \phi(x) \quad (39.8)$$

的解，可以猜想是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-D^2} \phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tD} \phi(x) e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) e^{-|t|} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-|x-t|} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-x+t} \phi(t) dt + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{x-t} \phi(t) dt, \end{aligned}$$

容易証明，这确实是微分方程的解。

例 2 由于

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^t} e^t e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} x^{-s} e^{-x} dx \quad (\text{令 } e^t = x) \\ &= \Gamma(1-s), \quad -\infty < \Re s < 1, \end{aligned}$$

現在和例 1 相反，我們試問，如果

$$\frac{1}{\Gamma(1-D)} f(x) = \phi(x),$$

那麼 $f(x)$ 所滿足的方程具有怎樣的形式的?

現在

$$\begin{aligned} f(x) &= \Gamma(1-D) \phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-et} e^{tD} \phi(x) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-et} e^{t(x-t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{(x-t)}} e^{x-t} \phi(t) dt. \end{aligned}$$

利用公式

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{x/k},$$

其中 γ 是 Euler 常數, 則對 $f(x)$ 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\gamma D} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{k}\right) e^{D/k} f(x) = \phi(x).$$

但是這個方程的意義應該如何解釋才好, 這就是本章所要研究的問題。

§ 40 雙邊 Laplace 變換

所謂雙邊 Laplace 變換, 指的是下面形狀的積分:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\alpha(t). \quad (40.1)$$

$\alpha(t)$ 在任意有限區間中是有界變分函數。(40.1) 的意義是下面的極限值:

$$\lim_{R \rightarrow \infty, R' \rightarrow -\infty} \int_{-R'}^R e^{-st} d\alpha(t).$$

若 $\alpha(t)$ 是一個函數 $\phi(t)$ 的不定積分, 那麼就有

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \phi(t) dt \quad \left[\text{寫成} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \phi(t) dt \right].$$

$\alpha(t)$ 是已標準化了的函數, 即

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \{ \alpha(t+0) + \alpha(t-0) \}.$$

定理 40.1 設積分 (40.1) 對於 $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ 及 $s_2 = \sigma_2 + i\tau_2$

($\sigma_1 < \sigma_2$) 收敛, 那么积分在带形区域 $\sigma_1 < \Re s < \sigma_2$ 中收敛。

证明 先考虑积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 。因为当 $s = s_1$ 时积分收敛, 所以根据定理 23.2, 当 $\Re s > \sigma_1$ 时积分也收敛。其次积分

$$\int_{-\infty}^0 e^{-st} d\alpha(t) = - \int_0^\infty e^{-(-s)u} d\alpha(-u)$$

当 $-s = -\sigma_2$ 时收敛, 所以仍然根据定理 23.2, 当 $\Re(-s) > -\sigma_2$ 时, 即 $\Re s < \sigma_2$ 时它也收敛。于是积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st} d\alpha(t)$$

在 $\sigma_1 < \Re s < \sigma_2$ 的范围中收敛。当 $\sigma_1 = -\infty$ 或 $\sigma_2 = +\infty$ 或两者都成立时, 收敛的区域可能是半平面或是全部平面。

积分 $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$ 与 $\int_0^\infty e^{su} d\alpha(-u)$ 可能对于同一个 $s = s_0$ 收敛。实际有这样的积分 (40.1), 它仅在一条直线 $s = \Re s_0 + i\tau$ ($-\infty < \tau < \infty$) 上收敛, 例如

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2} e^{-st} dt$$

就仅当 $\Re s = 0$ 时收敛。

关于收敛坐标有下面的定理。

定理 40.2 設

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = k \neq 0, \quad \limsup_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = l \neq 0,$$

若是 $k < l$, 则积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-st} d\alpha(t)$$

当 $k < \Re s < l$ 时收敛, 并且当 $\Re s < k$, $\Re s > l$ 时发散。

根据定理 24.4 可以容易地导出本定理, 証明略。

下面討論一下反演公式。

定理 40.3 設 $\phi(t)$ 是在任意有限区間中的可积函数, 并設

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \phi(t) dt \quad (40.2)$$

当 $\Re s = c$ 时绝对收敛。如果 $\phi(t)$ 在 t 的近傍是有界变分函数, 那么

$$\frac{1}{2} \{ \phi(t+0) + \phi(t-0) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) e^{st} ds.$$

証明 由于积分(40.2)当 $\Re s = c$ 时绝对收敛, 所以

$$e^{-ct} \phi(t) \in L_1(-\infty, \infty),$$

于是 $f(s)$ 是 $\sqrt{2\pi} e^{-ct} \phi(t)$ 的 Fourier 变换 ($s = c + i\tau$), 即

$$f(c + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct} \phi(t) e^{-i\tau t} dt.$$

又因为 $\phi(t) e^{-ct}$ 在 t 的近傍是有界变分函数, 由定理 5.1, 就有

$$\frac{1}{2} \{ \phi(t+0) + \phi(t-0) \} e^{-ct} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(c + i\tau) e^{i\tau t} d\tau.$$

这样就得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \phi(t+0) + \phi(t-0) \} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(c + i\tau) e^{(c+i\tau)t} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) e^{st} ds. \end{aligned} \quad \text{証毕}$$

§ 41 无穷乘积

在全平面正则的函数叫做整函数。整函数可以看成是多项式的扩张。与多项式的因式分解对应, 现在讲解一下整函数的因式分解。

设 $f(z)$ 是 z 的整函数, 以 a_1, a_2, \dots 作为它的单根, 且 $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. 在 a_n 的近傍可以把 $f(z)$ 写成

$$f(z) = (z - a_n) g(z).$$

这里 $g(z)$ 是正则的, 并且 $g(a_n) \neq 0$. 于是有

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (41.1)$$

右边的最后项当 $z=a_n$ 时正则。这就是说, $f'(z)/f(z)$ 在 $z=a_n$ 处有单极, 在这点的留数是 1。

更一般地说, 设函数 $\varphi(z)$ 在 a_1, a_2, \dots 处有单极 ($0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$), 除此以外它是正则的, 在 a_n 处的留数是 b_n . 设 C_n 是包含 a_1, a_2, \dots, a_n 的闭曲线, 原点与 C_n 的最短距离是 R_n , $R_n \rightarrow \infty$. 设 C_n 的长度 $L_n = O(R_n)$, $\varphi(z) = o(R_n)$ (z 是 C_n 上的点)。那么就有

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right). \quad (41.2)$$

现在来证明这个公式。我们考虑积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\varphi(w)}{w(w-z)} dw. \quad (41.3)$$

z 是 C_n 中的点。积分中的被积函数分别以 a_m ($m=1, 2, \dots, n$), 0 及 z 为极点。这些极点处的留数分别为 $b_m / \{a_m(a_m-z)\}$, $-\varphi(0)/z$, $\varphi(z)/z$. 于是有

$$I = \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{a_m(a_m-z)} - \frac{\varphi(0)}{z} + \frac{\varphi(z)}{z}. \quad (41.4)$$

但是

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{C_n} |\varphi(w)| \cdot \frac{L_n}{R_n(R_n-|z|)} \\ &= o(R_n) \cdot \frac{O(R_n)}{R_n(R_n-|z|)} = o(1). \end{aligned}$$

于是由(41.4)就有

$$\frac{\varphi(z)}{z} = \frac{\varphi(0)}{z} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{a_m(a_m-z)}.$$

这样就证明了(41.2)。

若是 $\varphi(z)$ 在 C_n 上满足 $\varphi(z) = o(R_n^{p+1})$, 我们考虑

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\varphi(w)}{w^{p+1}(w-z)} dz.$$

只要注意到 J 在 $w=0$ 处的留数是

$$-\frac{1}{z} \left\{ \frac{\varphi(0)}{z^p} + \frac{\varphi'(0)}{z^{p-1}} + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} \right\},$$

就完全同样地可以得到

$$\varphi(z) = \varphi(0) + z\varphi'(0) + \cdots + \frac{z^p \varphi^{(p)}(0)}{p!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m z^{p+1}}{a_m^{p+2}(z-a_m)},$$

这样就证明了下面的公式:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0) z^k}{k!} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{z-a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{z}{a_m^2} + \cdots + \frac{z^p}{a_m^{p+1}} \right). \quad (41.5) \end{aligned}$$

现在再回过头来, 令 $\varphi(z) = f'(z)/f(z)$. 这个函数 $\varphi(z)$ 显然满足上面所说的条件, 于是根据(41.2)就有

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

对于这个方程我们沿着一条由 0 到 z , 但是不通过极点的路綫进行积分, 就可得到

$$\begin{aligned} \log f(z) - \log f(0) \\ = z \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log(z-a_n) - \log(-a_n) + \frac{z}{a_n} \right\}. \end{aligned}$$

这里的 \log 由于所选的路綫不同, 可能取不同的值, 但是如果把它取为 e 的指数, 就能把这种不确定性完全消除了, 从而得到

$$f(z) = f(0) e^{z \frac{f'(0)}{f(0)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n}}. \quad (41.6)$$

例如我们能够得到

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi} \right) e^{\frac{z}{n\pi}}$$

(II') 意味着除去对应于 $n=0$ 的項), 即

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right). \quad (41.7)$$

同样地有

$$\cos z\pi = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{2k+1}\right) e^{\frac{2z}{2k+1}},$$

$$\cos z = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{(2n+1)\pi}\right) e^{\frac{2z}{(2n+1)\pi}}, \quad (41.8)$$

$$\cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right). \quad (41.9)$$

§ 42 Laguerre-Pólya 函数族

我們現在討論一下当 $E(x)$ 属于某一函数族时 $E(D)$ 的意义。这种函数曾經 Laguerre 加以研究。通常假設

$$E(0) = 1. \quad (42.1)$$

設 a_k, b, c 是实数, 并且 $c \geq 0$, 而且

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} < \infty. \quad (42.2)$$

在这种条件下, 如果 $E(x)$ 能写成

$$E(x) = e^{-cx^2+bx} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_k}\right) e^{\frac{x}{a_k}}, \quad (42.3)$$

那么就說, $E(x)$ 属于函数族 E .

由于(42.2), 可知(42.3)中的无穷乘积收敛^①。現在述說一下关于 E 的几点性质。

設 $E(x) \in E$. 把 x 代成 $s = \sigma + i\tau$, 并把 $E(x)$ 解析延拓到复平面中去, 則 $E(s)$ 成为整函数, 这时也記作 $E(s) \in E$.

引理 42.1 設 $E(s) \in E$, 則

① 見 E. C. Titchmarsh: Theory of functions, p. 250 或小松勇作: 一般函数論, p. 374.

$$|E(\sigma + i\tau)| \geq |E(\sigma)|. \quad (42.4)$$

証明 由于

$$E(s) = e^{-cs^2 + bs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{\frac{s}{a_k}}, \quad c \geq 0,$$

所以

$$\begin{aligned} |E(\sigma + i\tau)| &= e^{-c(\sigma^2 - \tau^2) + b\sigma} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\sigma}{a_k}\right)^2 + \frac{\tau^2}{a_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{\sigma/a_k} \quad (42.5) \\ &\geq e^{-c\sigma^2 + b\sigma} \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\sigma}{a_k} \right| e^{\sigma/a_k} = |E(\sigma)|. \quad \text{証毕} \end{aligned}$$

定理 42.1 若是 $E(s) \in E$, $E(s) \neq e^{bs} P(s)$, 这里 $P(s)$ 是一个多项式, 那末对于任意的正数 p 及 R , 有

$$\frac{1}{|E(\sigma + i\tau)|} = O\left(\frac{1}{|\tau|^p}\right), \quad |\tau| \rightarrow \infty, \quad (42.6)$$

这个式子在 $|\sigma| \leq R$ 的带形区域中一致地成立。

証明 設 $E(s)$ 只有有限个零点, 又設 $c > 0$. 零点的个数为 n . 这时由于(42.5)就有

$$\begin{aligned} |E(\sigma + i\tau)| &\geq e^{-c(\sigma^2 - \tau^2) + b\sigma} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\tau}{a_k} \right| e^{\sigma/a_k} \\ &\geq e^{-cR^2 + c\tau^2 - |b|R} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\tau}{a_k} \right| e^{-R/|a_k|} \geq K \cdot e^{c\tau^2}. \end{aligned}$$

此式当 $|\sigma| \leq R$ 时成立。 K 一般是依赖于 R 及 n 的。因此, 对于

任意的 $p > 0$ 成立着 $|E(\sigma + i\tau)| \leq \frac{1}{K} e^{-c\tau^2} = O\left(\frac{1}{|\tau|^p}\right)$.

下面再設 $E(s)$ 具有无限多个零点。令 $c \geq 0$, 对于任意給定的 p , 选这样的 N , 使得 $N > p$, 并且当 $k > N$ 时, 有 $|a_k| > R$. 現在令

$$E_N(s) = \prod_{k=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{s/a_k}.$$

根据引理 42.1, 有 $|E_N(s)| \geq E_N(\sigma)$. 于是

$$|E(\sigma + i\tau)| \geq e^{-cR^2 - |b|R} \prod_{k=1}^N \left| \frac{\tau}{a_k} \right| e^{-R/|a_k|} |E_N(\sigma)|.$$

由于 $|a_k| > R$, $|\sigma| \leq R$, 并且因为 $E_N(\sigma) = \prod_{k=N+1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\sigma}{a_k} \right| e^{\sigma/a_k}$, 所以 $E_N(\sigma) \neq 0$ ($|\sigma| \leq R$). 假设 $\frac{1}{E_N(\sigma)}$ 的最大值是 M , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{|E(\sigma + i\tau)|} &\leq e^{cR^2 + |b|R} \left(\prod_{k=1}^N \left| \frac{\tau}{a_k} \right| e^{-R/|a_k|} \right)^{-1} M \\ &= K_1(N, R) \cdot \frac{1}{|\tau|^N} = O\left(\frac{1}{|\tau|^p}\right). \end{aligned}$$

这里 $K_1(N, R)$ 是与 τ 无关的定数。

証毕

现在考虑 (41.1) 中的函数 g 是下面函数的情形,

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & -\infty < t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & 0 < t < \infty. \end{cases} \quad (42.7)$$

这时,

$$\chi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \frac{1}{1-s}, \quad -\infty < \Re s < 1,$$

$$\chi(0) = 1.$$

又 $|a|g(at)$ (≥ 0) 的 Laplace 变换是

$$\begin{aligned} \chi_1(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} |a|g(at) dt = \left(1 - \frac{s}{a}\right)^{-1}, \quad \Re s < a \ (a > 0) \\ &\quad \Re s > a \ (a < 0) \\ \chi_1(0) &= 1. \end{aligned} \quad (42.8)$$

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是异于零的实数, 不一定全部是不同的。令

$$g_k(t) = |a_k|g(a_k t), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (42.9)$$

并且设 α_1 是 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大的负数 (如果所有的 a_k 都是正的, 那么就设 $\alpha_1 = -\infty$), α_2 是 a_1, a_2, \dots, a_n 中最小的正数 (如果所有的 a_k 都是负的, 那么就设 $\alpha_2 = +\infty$)。使用了这些记号, 就有下面的定理。

定理 42.2 设 $G(t) = g_1 * g_2 * \dots * g_n(t)$, 令

$$E(s) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{s}{a_k}\right),$$

則

$$\frac{1}{E(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t) dt, \quad \alpha_1 < \Re s < \alpha_2, \quad (42.10)$$

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt = 1, \quad m = \int_{-\infty}^{\infty} t G(t) dt = - \sum_1^n \frac{1}{a_k},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-m)^2 G(t) dt = \sum_1^n \frac{1}{a_k^2}.$$

証明 容易証明如果 $a_k > 0$, 則 $g_k(t)$ 的 Laplace 变换当 $\Re s < a_k$ 时絕對收斂; 如果 $a_k < 0$, 則当 $\Re s > a_k$ 时絕對收斂。由于这个 Laplace 变换是 $(1-s/a_k)^{-1}$ (根据 (42.8)), 所以 $g_1 * \dots * g_n(t)$ 的 Laplace 变换可以反复地应用定理 27.3 而得到, 是 $\prod_1^n (1-s/a_k)^{-1}$, 并且容易証明它的收斂范围是 $\alpha_1 < \Re s < \alpha_2$. 在 (42.10) 中設 $s=0$, 由于 $E(0)=1$, 所以有 $\int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt = 1$. 又因为

$$\frac{E'(s)}{E(s)} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k - s}.$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t G(t) dt &= - \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{E(s)} \right]_{s=0} = \left[\frac{E'(s)}{E^2(s)} \right]_{s=0} \\ &= \left[\frac{E'(s)}{E(s)} \right]_{s=0} \cdot \frac{1}{E(0)} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}. \end{aligned}$$

同样地

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 G(t) dt &= \left[\frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{E(s)} \right]_{s=0} \\ &= \left[- \frac{E''(s)}{E^2(s)} + \frac{2(E'(s))^2}{E^3(s)} \right]_{s=0} \\ &= -E''(0) + 2(E'(0))^2. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} E''(s) &= -E'(s) \sum \frac{1}{a_k - s} - E(s) \sum \frac{1}{(a_k - s)^2}, \\ E''(0) &= \left(\sum \frac{1}{a_k} \right)^2 - \sum \frac{1}{a_k^2}, \quad E'(0) = - \sum \frac{1}{a_k}. \end{aligned}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 G(t) dt = \sum \frac{1}{a_k^2} + \left(\sum \frac{1}{a_k} \right)^2.$$

也就是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-m)^2 G(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 G(t) dt - m^2 = \sum \frac{1}{a_k^2}. \quad \text{証毕}$$

定理 42.3 設 $E(s) \in E$, 并且 $E(s) \neq e^{bs} P(s)$, [$P(s)$ 是一个多项式], 这样就成立着

$$\frac{1}{E(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t) dt. \quad (42.11)$$

公式成立的範圍是含有坐标原点, 但不含 $E(s)$ 的零点的所有垂直带形区域中最大的那一个。这里 $G(t) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt = 1$, 并且

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds. \quad (42.12)$$

証明 由于 $E(s) \in E$, 所以存在着多项式 $E_n(s)$ 的函数序列, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(s) = E(s) \quad (42.13)$$

在任一个 $|s| \leq A$ 的圓中一致收斂。下面我們可以証明, 这样的 $E_n(s)$ 仅有实零点。据所熟知的事实, 由于 $\sum \frac{1}{a_k^2} < \infty$, 所以 (42.3) 中的无穷乘积为它的部分乘积在 $|s| \leq A$ 範圍中所一致趋近^①。但是这些部分乘积都是只有实零点的多项式和形状如 $e^{\alpha s}$ 的函数的乘积 [可以把 (42.3) 中的 e^{bs} 算入后一项], 于是只要証明函数 e^{-cs} 与 $e^{\alpha s}$ 都可以用仅具有实零点的多项式来逼近就够了。

我們規定, 下面所考虑的是当 $z=0$ 时成为零的 \log 的分支, 那末由 Taylor 定理, 当 $|z| \leq A$, $n \geq 2A$ 时, 成立着

① 見前面举出的 Titchmarsh 的书。

$$\begin{aligned} \left| z + \log \left(1 - \frac{z}{n} \right)^n \right| &\leq n \left[\frac{1}{2} \left| \frac{z}{n} \right|^2 + \frac{1}{3} \left| \frac{z}{n} \right|^3 + \dots \right] \\ &\leq \frac{n}{2} \frac{|z|^2/n^2}{1 - |z|/n} \leq \frac{A^2}{n}. \end{aligned}$$

在这里令 $z = -\alpha s$ ($\alpha \neq 0$), 则当 $|s| \leq \frac{A}{|\alpha|}$ 时, 有

$$\left| -\alpha s + \log \left(1 + \frac{\alpha s}{n} \right)^n \right| \leq \frac{A^2}{n},$$

因为

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1,$$

所以

$$\left| \exp \left\{ -\alpha s + \log \left(1 + \frac{\alpha s}{n} \right)^n \right\} - 1 \right| \leq e^{A^2/n} - 1,$$

也就是

$$\left| \left(1 + \frac{\alpha s}{n} \right)^n e^{-\alpha s} - 1 \right| \leq e^{A^2/n} - 1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha s}{n} \right)^n = e^{\alpha s}$ 当 $|s| \leq A/|\alpha|$ 时一致地成立。所以把

αs 换成 $-cs^2$, 当 $|s| \leq (A/c)^{1/2}$ 时, 就有一致收敛的公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{cs^2}{n} \right)^n = e^{-cs^2}.$$

这样就证明了 (42.13) 在任意圆中应该成立, 并且这种收敛是一致的。

现在根据引理 42.1, 有

$$|E(iy)| \geq E(0) = 1,$$

所以在 $|y| \leq A$ 中一致地成立着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E_n(iy)} = \frac{1}{E(iy)}. \quad (42.14)$$

由于定理 42.2, 有这样的函数 $\alpha_n(t)$, 使得

$$\frac{1}{E_n(iy)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} d\alpha_n(t).$$

这里

$$\alpha_n(t) = \int_{-\infty}^t G_n(u) du,$$

其中 $G_n(u)$ 是相当于定理 42.2 中 $G(t)$ 的函数。因为 $G_n(t) \geq 0$, 所以 $\alpha_n(t)$ 是单调增函数, 并且 $\alpha_n(\infty) = 1, \alpha_n(-\infty) = 0$. 这样, 根据定理 18.2 及 (42.14), 可知存在着满足方程

$$\frac{1}{E(iy)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} d\alpha(t) \quad (42.15)$$

的函数 $\alpha(t)$. 于是

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{e^{st} - 1}{sE(s)} ds. \quad (42.16)$$

据定理 42.1 可知, 上式右边的积分绝对收敛。再由定理 42.1, 当对上式的两边作微分时, 在公式的右边, 微分可以在积分符号以内进行。由于 $\alpha'(t) = G(t)$, 所以有

$$\alpha'(t) = G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds, \quad -\infty < t < \infty.$$

这时再用一下 (42.15), 就得到

$$\frac{1}{E(iy)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} G(t) dt.$$

但是 $E(s)$ 是整函数, $\frac{1}{E(s)}$ 在包含原点, 但不含 $E(s)$ 的零点的最大带形区域 $\alpha_0 < \Re s < \beta_0$ (令这个区域为 S) 中是正则的。所以 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t) dt$ 在 S 中收敛。收敛的理由很明显, 因为

$$(E(s))^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\alpha_n(t)$$

在 S 中收敛, 且在 S 内的任一闭区域中一致收敛于 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$. 于是在 S 中成立着

$$\frac{1}{E(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t) dt. \quad \text{証毕}$$

关于函数 $G(t)$ 还有下面的定理。

定理 42.4 定理 42.3 中的函数 $G(t)$ 有下列的性质:

(i) $G(t) \geq 0$,

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} G(t) dt = 1,$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} tG(t) dt = b,$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2 G(t) dt = c + \sum_1^{\infty} \frac{1}{a_k^2}.$$

証明 (i), (ii) 无需再証明。至于 (iii) 及 (iv), 可以把定理 42.2 中的 (42.11) 微分, 然后代入 $s=0$, 就能得到証明。

§ 43 反演公式

現在我們研究 $E(D)$ 的意义。为此, 先討論一下和这个問題有关的一般結合变换

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) G(t) dt \quad (43.1)$$

的反演公式。就是說 $G(t)$ 是已給的函数, 如何用 f 来表达函数 ϕ 。

定理 43.1 設 $E(x) \in E$, 但 $b=c=0$ 。 $G(x)$ 是在定理 42.3 中用 (42.11) 所定义的函数, $\phi(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中为有界連續函数。若成立

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) G(t) dt, \quad (43.2)$$

那么就有

$$E(D)f(x) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (43.3)$$

这里

$$E(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k}. \quad (43.4)$$

在証明定理以前我們先解釋一下定理的意义。令

$$P_n(D) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k}.$$

(43.3) 式显然是

$$E(D) \cdot G * \phi(x) = \phi(x).$$

这个式子的意义就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(D) \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) \phi(t) dt \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(D) G(x-t) \phi(t) dt.$$

这里 $P_n(D)G(x)$ 的意义如下:

$$\begin{aligned} P_n(D)G(x) &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k} G(x) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k} \left(1 - \frac{1}{a_n} \frac{d}{dx}\right) G\left(x + \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k} \left(G\left(x + \frac{1}{a_n}\right) - \frac{1}{a_n} G'\left(x + \frac{1}{a_n}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k} G_1(x), \end{aligned}$$

重复地使用这种方法, 就得到

$$\begin{aligned} &= \prod_{k=1}^{n-2} \left(1 - \frac{D}{a_k}\right) e^{D/a_k} G_2(x) \\ &\dots\dots\dots \\ &= G_n(x). \end{aligned}$$

所以(43.3)的意义就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x-t) \phi(t) dt = \phi(x). \quad (43.5)$$

现在我们来证明这个公式。

证明 根据(43.12)有

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{sx}}{E(s)} ds.$$

于是就有

$$G_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{sx} P_n(s)}{E(s)} ds. \quad (43.6)$$

这个公式的证明如下。由于

$$e^{\alpha D} G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{\alpha D} e^{sx}}{E(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{s(x+\alpha)}}{E(s)} ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{e^{sx} e^{s\alpha}}{E(s)} ds,$$

又因为

$$\begin{aligned} DG(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} De^{sx} \frac{e^{s\alpha}}{E(s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} e^{sx} \frac{se^{s\alpha}}{E(s)} ds, \end{aligned}$$

反复的使用这两个公式就能导出(43.6)。

現在

$$E_n(s) = \frac{E(s)}{P_n(s)}$$

是属于 E 族的函数。根据定理 42.4, 对于这个 $E_n(s)$ 存在着相当于定理 42.4 中 $G(t)$ 的函数, 我們令它为 $G_n(t)$. $G_n(t)$ 具有定理 42.4 所描述的性质。于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(t) dt = 1.$$

这时, 如果令

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x-t) \phi(t) dt - \phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_n(y) [\phi(x-y) - \phi(x)] dy, \end{aligned}$$

那么我們只要証明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $I_n(x)$ 收敛于零, 就得到了定理的証明。事实上, 令

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_{|y| < \delta} + \int_{|y| > \delta} \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (43.7)$$

δ 是这样确定的: 对于已給的正数 ε , 若是 $|y| \leq \delta$, 就有下面的不等式:

$$|\phi(x-y) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

于是

$$|J_1| \leq \int_{-\delta}^{\delta} G_n(y) |\phi(x-y) - \phi(x)| dy$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} G_n(y) dy \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G_n(y) dy = \varepsilon. \quad (43.8)$$

其次,

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq 2 \sup_{-\infty < y < \infty} \phi(y) \int_{|y| > \delta} G_n(y) dy \\ &\leq 2 \sup_{-\infty < y < \infty} \phi(y) \frac{1}{\delta^2} \int_{|y| > \delta} y^2 G_n(y) dy \\ &\leq 2 \sup_{-\infty < y < \infty} \phi(y) \frac{1}{\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 G_n(y) dy \\ &= 2 \sup_{-\infty < y < \infty} \phi(y) \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}. \end{aligned}$$

利用定理(42.4)的性质(iv), 就得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} J_2 = 0.$$

把这些结果代入(43.7), 就得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_n(x)| \leq \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 所以 $I_n(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

証毕

§ 44 Laplace 变换的反演公式

我们在 § 26 中已经讲解过 Laplace 变换的反演公式。设

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

是在 $|z| \leq 1$ 中的正则函数, 于是

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

C 是单位圆周。和这个公式相类似的是(26.1)的反演公式。更确切地说, (26.1)的反演公式与

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \\ s_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}} dz \end{aligned}$$

相类似^①。

但是用 $f(z)$ 求系数 a_n 的公式另外还有一个,即大家所熟知的 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 这一节中我們研究一下和这个公式相类似的结果。

由 §6 中的例 2, 我們知道可以用結合变换的公式导出 Laplace 变换, 所以对于 Laplace 变换的反演公式, 自然可以想象, 应该能由前节中的反演公式导出。

設

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \phi(t) dt. \quad (44.1)$$

象 §5 中那样, 把 x 换成 e^x , 把 t 换成 e^{-t} , 就得到

$$f(e^x) e^x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x e^{-t}} \phi(e^{-t}) dt.$$

令 $f(e^x) e^x = F(x)$, $\phi(e^{-x}) = \psi(x)$, $e^{-e^x} e^x = G(x)$, 則有

$$F(x) = G * \psi(x). \quad (44.2)$$

现在要用 F 来表达 ψ , 自然可用定理 43.1. 在这种情形下

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x)} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} G(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} e^{-e^t} e^t dt = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-x} dy = \Gamma(1-x), \quad -\infty < x < 1. \end{aligned}$$

但是,

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{x/k} \textcircled{2},$$

^① 作者这段叙述可能是从 D. V. Widder: The Laplace transform (1946), II §7 中摘引过来的, 那里指的是 Laplace-Stieltjes 变换的反演。設 $\alpha(t) = s_n$ ($n-1 \leq t < n$; $n=1, 2, \dots$), $\alpha(0)=1$, 又設 $e^{-s}=z$. 那末

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的反演就是

$$\alpha(t) = s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\pi}^{C+i\pi} \frac{f(e^{-s})e^{st}}{1-e^{-s}} ds$$

($n-1 \leq t < n$; $n=1, 2, \dots$; $C>0$).

由留数定理, 被积函数的分母 $1-e^{-s}$ 可以換为 s , 于是得到定理 26.1 里的形式。但如果用来比喻 Laplace 变换的反演, 更确切的其实倒是前面关于 a_n 的公式。又原文中, §26 誤作 §16, (26.1) 誤作 (41.1). ——校者注

^② 見河田: 应用数学概論 I (岩波全书).

这里

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

令
$$P_n(x) = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right) e^{x/k} = n^{-\gamma x} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{k}\right),$$

于是(43.8)或是(43.5)就成为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(D) e^x f(e^x) = \phi(e^{-x}). \quad (44.3)$$

这个式子的左边是

$$\begin{aligned} (1-D) e^x f(e^x) &= e^x f(e^x) - \frac{d}{dx} e^x f(e^x) \\ &= -e^{2x} f'(e^x), \\ \left(1 - \frac{D}{2}\right) e^{2x} f(e^x) &= e^{2x} f'(e^x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} e^{2x} f'(e^x) \\ &= -\frac{1}{2} e^{3x} f''(e^x). \end{aligned}$$

連續的使用这种計算,就得到

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{k}\right) e^x f(e^x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{(n+1)x} f^{(n)}(e^x).$$

于是

$$\begin{aligned} n^D \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{k}\right) e^x f(e^x) &= e^{(\log n)D} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{k}\right) e^x f(e^x) \\ &= e^{(\log n)D} \frac{(-1)^n}{n!} e^{(n+1)x} f^{(n)}(e^x) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} e^{(n+1)(x + \log n)} f^{(n)}(e^{x + \log n}) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} e^{(n+1)x} n^{(n+1)} f^{(n)}(ne^x). \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e^{-x}}\right)^{n+1} f^{(n)}(ne^x) = \phi(e^{-x}).$$

令 $e^{-x} = y$, 就得到下面的定理。

定理 44.1 設 $\phi(t)$ 是有界連續函数, 并設

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \phi(t) dt, \quad x > 0,$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{y}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{y}\right) = \phi(y).$$

§ 45 Weierstrass 变换

在 § 43 中所討論的函数 $E(x)$ 是当 $c=0$ 时的情形, 在这一节中我們研究 $c \neq 0$ 的一个例子, 即

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/4} \phi(t) dt. \quad (45.1)$$

这时, 叫 $f(x)$ 为 $\phi(x)$ 的 **Weierstrass 变换**.

令

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4}, \quad (45.2)$$

則(45.1)可以写成

$$f(x) = \phi * G(x).$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t) dt = e^{s^2} \quad (\text{可由 (3.15) 导出}), \quad (45.3)$$

所以

$$e^{-s^2} = E(s).$$

于是可以猜想 f 与 ϕ 所滿足的方程为

$$e^{-D^2} f(x) = \phi(x).$$

現在我們来解釋一下 $e^{-D^2} f(x)$ 的意义。

比(45.3)更一般的公式是(据(3.15))

$$e^{ys^2} = (4\pi y)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-t^2/(4y)} dt,$$

它对于所有的复变数 s 都成立。令 $s = -iD$, 則有

$$e^{-yD^2} = (4\pi y)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itD} e^{-t^2/(4y)} dt.$$

对它使用公式(39.1), 就得到

$$\begin{aligned}
 e^{-\nu D^2} f(x) &= (4\pi y)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itD} f(x) e^{-t^2/(4y)} dt \\
 &= (4\pi y)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+it) e^{-t^2/(4y)} dt \\
 &= -i(4\pi y)^{-1/2} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(z) e^{(z-x)^2/(4y)} dz.
 \end{aligned}$$

因为对于很多的函数 f 能够证明, 积分中的积分路线的直线允许用一条与它平行的直线来代替, 所以现在把这条积分路线换成 $(c-i\infty, c+i\infty)$ 后 (c 适当的定数), 就得到下面关于 e^{-D^2} 的定义。

$$\begin{aligned}
 e^{-D^2} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 1-0} e^{-\nu D^2} f(x) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 1-0} -i(4\pi y)^{-1/2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z) e^{(z-x)^2/(4y)} dz \quad (45.4)
 \end{aligned}$$

(c 是适当的常数)。

譬如在 (43.4) 中 $E(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(D)$ 内的 n , 现在在 (45.4) 中和它对应的是 y 这个参数。利用 (45.4) 对于 $e^{-D^2} f(x)$ 所作的解释, 就得到了下面的定理。

定理 45.1 设 $\phi(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中是有界连续函数, 而 $f(x)$ 是用 (45.1) 所决定的 ϕ 的 Weierstrass 变换, 则

$$e^{-D^2} f(x) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (45.5)$$

证明 由 (45.3) 及反演公式 (定理 40.3) 有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-s^2/4} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zs+s^2} dz. \quad (45.6)$$

于是

$$\begin{aligned}
 &-i(4\pi y)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-z^2/4) \exp\{(z-x)^2/4y\} dz \\
 &= -i \frac{1}{4\pi \sqrt{y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(z^2 \frac{1-y}{4y} - \frac{x}{2y} z\right) dz \\
 &= -i \frac{1}{2\pi \sqrt{1-y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(s^2 - \frac{x}{2y} \sqrt{\frac{4y}{1-y}} s\right) ds,
 \end{aligned}$$

根据 (45.6),

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-y)}} \exp(-x^2/4(1-y)). \quad (45.7)$$

于是由(45.4)有

$$\begin{aligned} e^{-D^2} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 1-0} e^{-yD^2} f(x) \\ &= \lim_{y \rightarrow 1-0} \left[-i(4\pi y)^{-1/2} \int_{-\infty}^{i\infty} \exp\{(z-x)^2/4y\} dz \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(z-t)^2/4\} \phi(t) dt \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt (-i(4\pi y)^{-1/2}) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{i\infty} \exp\{(z-x)^2/4y\} \exp\{-(z-t)^2/4\} dz \\ &= \lim_{y \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \frac{-i}{\sqrt{4\pi y}} \\ &\quad \times \int_{-t-i\infty}^{-t+i\infty} \exp\{(s-x+t)^2/4y\} \exp(-s^2/4) ds, \end{aligned}$$

容易証明,最后积分中的积分可以換成 $\int_{-\infty}^{i\infty}$, 于是由(45.7)就得到了

$$= \lim_{y \rightarrow 1-0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{1}{\sqrt{4\pi(1-y)}} \exp\{-(x-t)^2/4(1-y)\} dt$$

根据定理 10.1, 右边應該等于 $\phi(x)$. (只要在定理 10.1 中令

$K(x, t, \delta) = K(x-t, \delta) = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{4\pi}} \exp\{-\delta(x-t)^2\}$ 即可。) 証毕

§ 46 Stieltjes 变换

現在我們純粹形式地对 $\varphi(t)$ 連施以两次 Laplace 变换, 即設

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} e^{-xu} du \int_0^{\infty} e^{-ut} \varphi(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \int_0^{\infty} e^{-u(x+t)} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{x+t} dt. \end{aligned}$$

一般, 設 $\varphi(t)$ 是定义在 $0 < t < \infty$ 中的函数, 如果

$$f(s) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{s+t} dt \quad (46.1)$$

收敛的话, 那么就叫 f 是 $\varphi(t)$ 的 Stieltjes 变换. 关于这个变换的收敛区域以及解析性质有下面的定理.

定理 46.1 若是积分(46.1) 对于一个不在负实轴(包含原点)上的点 s_0 收敛, 那么它就对任何一个这样的点 s 收敛, 而 $f(s)$ 在沿着射线 $(-\infty, 0]$ 割开的平面上是正则函数.

证明 設
$$f(s_0, t) = \int_0^t \frac{\varphi(u)}{s_0+u} du,$$

則
$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\varphi(u)}{s+u} du &= \int_0^t \frac{s_0+u}{s+u} \frac{\varphi(u)}{s_0+u} du \\ &= f(s_0, t) \frac{s_0+t}{s+t} + (s_0-s) \int_0^t \frac{f(s_0, u)}{(s+u)^2} du. \end{aligned}$$

根据假设, $f(s_0, t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时收敛, 所以无论是第一项或是第二项对于不在 $(-\infty, 0]$ 上的点都是收敛的. 于是

$$f(s) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)}{s+u} du = f(s_0) + (s_0-s) \int_0^{\infty} \frac{f(s_0, u)}{(s+u)^2} du. \quad (46.2)$$

这样就证明了定理的前半部.

和上面的证法同样地有

$$\int_R^{\infty} \frac{\varphi(u)}{s+u} du = \left[f(s_0, u) \frac{s_0+u}{s+u} \right]_R^{\infty} + (s_0-s) \int_R^{\infty} \frac{f(s_0, u)}{(s+u)^2} du.$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{\infty} \frac{\varphi(u)}{s+u} du \right| &\leq |f(s_0) - f(s_0, R)| + \left| f(s_0, R) \frac{s-s_0}{s+R} \right| \\ &\quad + |s_0-s| \int_R^{\infty} \frac{|f(s_0, u)|}{|s+u|^2} du. \end{aligned}$$

现在設 s 是在除去 $(-\infty, 0]$ 的平面中任意一个闭区域 D 内的任意点. 設原点到 D 中一点的最大距离为 d , 那么 $|s| \leq d$. 設 $R > d$, 則

$$\left| \int_R^\infty \frac{\varphi(u) du}{s+u} \right| \leq |f(s_0) - f(s_0, R)| + |f(s_0, R)| \frac{d+|s_0|}{R-d} \\ + (d+|s_0|) \int_R^\infty \frac{|f(s_0, u)|}{(u-d)^2} du.$$

在这里令 $R \rightarrow \infty$, 右边的各项都收敛于 0, 所以

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u) du}{s+u}$$

在闭区域 D 中一致收敛。此外, $\int_0^R \frac{\varphi(u) du}{s+u}$ 在 D 中显然是正则的, 所以 $\int_0^\infty \frac{\varphi(u) du}{s+u}$ 在 D 中正则, 即 $f(s)$ 在 $(-\infty, 0]$ 以外的全部复数平面上正则。 証毕

此外, 容易証明

$$f^{(n)}(s) = (-1)^n n! \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{(s+t)^{n+1}} dt, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (46.3)$$

下面証明一下反演公式。

定理 46.2 設

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{s+t} dt$$

在除去 $(-\infty, 0]$ 的任一区域中收敛。若是对于一个 t ($t > 0$), $\varphi(t+0)$ 及 $\varphi(t-0)$ 都存在, 那么

$$\frac{1}{2} \{ \varphi(t+0) + \varphi(t-0) \} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} (f(-t-i\varepsilon) - f(-t+i\varepsilon)). \quad (46.4)$$

証明

$$\frac{1}{2\pi i} \{ f(-t-i\varepsilon) - f(-t+i\varepsilon) \} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \varphi(u) \left\{ \frac{1}{-t-i\varepsilon+u} - \frac{1}{-t+i\varepsilon+u} \right\} du \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon \varphi(u) du}{(u-t)^2 + \varepsilon^2}. \quad (46.5)$$

在定理 10.1 中, 取 $K(t, u, \varepsilon) = K(u-t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi(u-t)^2 + \varepsilon^2}$, 就可以看出, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, (46.5) 的右边趋于 (46.4) 的左边. 应用定理 10.1 时设 $\alpha=1$. 所以, 为了说明应用定理 10.1 是合理的, 只要证明

$$\frac{\varphi(u)}{1+u^2} \in L_1(0, \infty)$$

就够了. 下面我们来导出这个结果. 由于当 $s=1$ 时, $f(s)$ 的积分收敛, 积分

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt, \quad c > 0$$

存在. 现在再证明积分

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$$

也存在. 事实上,

$$\begin{aligned} \int_c^R \frac{\varphi(t)}{t^2} dt &= \left[\frac{1}{t} \int_c^t \frac{\varphi(u)}{u} du \right]_c^R + \int_c^R \frac{1}{t^2} dt \int_c^t \frac{\varphi(u)}{u} du \\ &= \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\varphi(u)}{u} du + \int_c^R \frac{dt}{t^2} \int_c^t \frac{\varphi(u)}{u} du, \end{aligned}$$

因为 $\left| \int_c^t \frac{\varphi(u)}{u} du \right|$ 有界 ($\leq M$), 所以右边的第一项当 $R \rightarrow \infty$ 时收敛于零. 此外, 对于第二项有

$$\int_c^R \frac{dt}{t^2} \left| \int_c^t \frac{\varphi(u)}{u} du \right| \leq M \int_c^R \frac{dt}{t^2}.$$

所以当 $R \rightarrow \infty$ 时 $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \int_c^t \frac{\varphi(u)}{u} du$ 存在, 即 $\frac{\varphi(t)}{t^2} \in L_1(c, \infty)$.

证毕

§ 47 Stieltjes 变换与结合函数

考虑

$$E(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2} \right). \quad (47.1)$$

由于 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, $\Re s < 1$,

所以
$$\frac{\sin \pi s}{\pi s} = \frac{1}{s\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s)}. \quad (47.2)$$

令
則

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} G(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-s} dt = \Gamma(1-s), \quad \Re s < 1. \quad (47.3)$$

又

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} G(t-u) G(-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(-u) du \int_{-\infty}^{\infty} G(t-u) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(-u) e^{-su} du \int_{-\infty}^{\infty} G(t-u) e^{-s(t-u)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(-u) e^{-su} du \int_{-\infty}^{\infty} G(v) e^{-sv} dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{su} du \int_{-\infty}^{\infty} G(v) e^{-sv} dv, \end{aligned}$$

根据(47.3)

$$= \Gamma(1+s) \cdot \Gamma(1-s), \quad -1 < \Re s < 1. \quad (47.4)$$

又因为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} G(t-u) G(-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{t-u}} e^{t-u} e^{-e^{-u}} e^{-u} du \\ &= e^t \int_0^{\infty} v e^{-(e^t+1)v} dv = \frac{e^t}{(e^t+1)^2}, \quad -\infty < t < \infty, \end{aligned}$$

所以根据(47.4)有

$$\frac{\pi s}{\sin \pi s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt, \quad -1 < \Re s < 1. \quad (47.5)$$

此外, 設 $\varphi(t)$ 的 Stieltjes 变换是 $f(x)$, 即

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{x+t} dt, \quad x > 0. \quad (47.6)$$

我們来导出它的反演公式。前一节所讲的反演公式主要是用复变数求到的,这一节我們用实变数来求。

先把(47.6)对 x 微分,根据(46.3)就有

$$f'(x) = - \int_0^\infty \frac{\varphi(t) dt}{(t+x)^2}.$$

把 x 换成 e^x , t 换成 e^t , 就得到

$$-e^x f'(e^x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x-t} \phi(e^t)}{(e^{x-t}+1)^2} dt.$$

公式的右边显然是 $\frac{e^t}{(e^t+1)^2}$ 与 $\phi(e^t)$ 的結合函数, 所以由定理

43.1, 有

$$-\frac{\sin \pi D}{\pi D} [e^x f'(e^x)] = \varphi(e^x), \quad -\infty < x < \infty.$$

这就是說, 成立着

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=-n+1}^{n+1} \left(1 + \frac{D}{k}\right) [e^x f'(e^x)] = \varphi(e^x).$$

这里 \prod' 表示应除去 $k=0$ 这一項。

象定理 43.1 中的証明那样, 有

$$-\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{D}{k}\right) [e^x f'(e^x)] = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} e^{nx} f^{(n)}(e^x).$$

于是

$$\begin{aligned} & -\prod_{k=-n+1}^{n+1} \left(1 + \frac{D}{k}\right) [e^x f'(e^x)] \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{D}{k}\right) \left(-\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{D}{k}\right) [e^x f'(e^x)]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{D}{k}\right) \left(\frac{(-1)^n}{(n-1)!} e^{nx} f^{(n)}(e^x)\right). \end{aligned} \quad (47.7)$$

但是利用一下公式

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{D}{k}\right) c e^{-kx} g(x) &= c e^{-kx} g(x) + \frac{c}{k} (-k e^{kx} g(x) + e^{-kx} g'(x)) \\ &= \frac{c}{k} e^{kx} g'(x), \end{aligned}$$

并且令 $e^{nx} f^{(n)}(e^x) = e^{-(n+1)x} H(e^x)$, 則 (47.7) 就成为

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{D}{k}\right) \left(1 + \frac{D}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{(n-1)!} e^{-(n+1)x} H(e^x) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{D}{k}\right) \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{n+1} e^{-nx} H'(e^x), \end{aligned}$$

反复地使用这种方法, 就得到

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{(n+1)!} H^{(n+1)}(e^x) \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)! (n+1)!} \left[x f^{(n)}(x) \right]_{x=e^x}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

因此根据定理 43.1, 就得到下面的結果:

定理 47.1 設 $\varphi(x)$ 是有界連續函数 ($0 < x < \infty$). 如果它的 Stieltjes 变换存在, 則有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)! (n-1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [x^{2n+1} f^{(n)}(x)] = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty.$$

对于这个反演問題, 我們还能証明其他形式的公式。由于

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{x+t} dt,$$

所以有

$$e^{x/2} f(e^x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{t/2} \varphi(e^t)}{e^{(x-t)/2} + e^{-(x-t)/2}} dt. \quad (47.8)$$

这个式子的右边显然是 $e^{t/2} \varphi(e^t)$ 与 $\frac{1}{2} \operatorname{sech} \frac{t}{2}$ 的結合函数。由

(47.5) 有

$$\frac{\pi s}{\sin \pi s} = - \int_{-\infty}^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^t + 1} \right) dt,$$

利用分部积分法,

$$= -s \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-st}}{e^t + 1} dt, \quad -1 < \Re s < 0.$$

所以有

$$\frac{\pi}{\sin \pi s} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-st}}{e^t + 1} dt.$$

把 s 换成 $s - \frac{1}{2}$ 后, 就得到

$$\frac{\pi}{\cos \pi s} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{st}}{e^{t/2} + e^{-t/2}} dt, \quad -\frac{1}{2} < \Re s < \frac{1}{2}. \quad (47.9)$$

那么令 $E(s) = \frac{\pi}{\cos \pi s}$, 根据定理 43.1, 就有

$$\pi^{-1} [\cos \pi D] [e^{x/2} f(e^x)] = e^{t/2} \varphi(e^t). \quad (47.10)$$

由 (41.9) 很明显地 $E(s) \in E$ (因为满足定理 43.1 中的条件)。此外, 能够证明,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2D}{2k-1}\right) [e^{x/2} f(e^x)] = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!} e^{(2n+1)x/2} f^{(n)}(e^x),$$

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2D}{2k-1}\right) [e^{-(2n-1)x/2} f(e^x)] = \frac{4^n n!}{(2n)!} e^{x/2} f^{(n)}(e^x).$$

利用这些事实就可由 (47.7) 导出下面的定理:

定理 47.2 設 $\varphi(t) \sqrt{t}$ 是有界連續函数, 并且 $\varphi(t)$ 的 Stieltjes 变换

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{x+t} dt, \quad x > 0$$

存在, 則有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} [x^{2n} f^{(n)}(x)]^{(n)} = \varphi(x). \quad (47.11)$$

§ 48 Meijer 变换

設

$$K_0(x) = -\gamma - \log \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \gamma\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad 0 < x < \infty. \quad (48.1)$$

γ 是 Euler 常数。 $K_0(x)$ 可以表达成为下面的积分形式^①:

① 見 W. Magnus-F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik (Berlin, 1948).

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(\cosh t)} dt. \quad (48.2)$$

令
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{xt} K_0(xt) \varphi(t) dt. \quad (48.3)$$

$f(x)$ 就叫做 $\varphi(t)$ 的 Meijer 变换。当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$K_0(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\right).$$

由 (48.3) 就有

$$e^{x/2} f(e^x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-t} K_0(e^{x-t}) e^{-t/2} \varphi(e^{-t}) dt,$$

右边是 $e^t K_0(t)$ 与 $e^{-t/2} \varphi(e^{-t})$ 的結合函数。又因为

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^t e^{-e^{2t}} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g(t) dt,$$

所以

$$\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u) g(u) du,$$

而

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u) g(u) du &= e^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{2t-2u}} e^{-e^{2u}} du \\ &= e^t \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2e^t \cosh(t-2u)\} du \\ &= \frac{1}{2} e^t \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2e^t \cosh v\} dv = e^t K_0(2e^t). \end{aligned}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^t K_0(e^t) dt = 2^{-s-1} \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right). \quad (48.4)$$

但是根据大家熟知的事实, 对于 $\Gamma(s)$ 有公式

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s/2}}{\sqrt{\pi}} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{s}{2k-1}\right).$$

因此根据定理 43.1 有

$$\frac{2^{D+1}}{\Gamma^2\left(\frac{1-D}{2}\right)} e^{x/2} f(e^x) = e^{-x/2} \varphi(e^{-x}),$$

而这个公式可以用上面的结果写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} (2n)^D \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{2k-1}\right)^2 (e^{x/2} f(e^x)) = e^{-x/2} \varphi(e^{-x}). \quad (48.5)$$

另一方面,一般地成立着公式:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{2k-1}\right) [e^x g(e^{2x})] = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!} e^{(2n+1)x} g^{(n)}(e^x).$$

利用这个公式,并设 $e^{x/2} f(e^x) = e^x R(e^{2x})$ [即把 $e^{x/2}$ 改写成 $(e^{2x})^{1/2}$], 则有

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{2k-1}\right) [e^{x/2} f(e^x)] = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!} e^{(2n+1)x} R^n(e^{2x}),$$

再设 $e^{(2n+1)x} R^{(n)}(e^{2x})$ 等于 $e^x H(e^{2x})$, 则有

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{D}{2k-1}\right)^2 [e^{x/2} f(e^x)] = \frac{4^{2n} (n!)^2}{(2n!)^2} e^{(2n+1)x} H^{(n)}(e^{2x}).$$

利用这些公式, [只要令 $(2n)^D = e^{D \log 2n}$], 就能得到下面的结果:

定理 48.1 设 $\varphi(t) \sqrt{t}$ 是有界连续的函数, 并设

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt} K_0(xt) \varphi(t) dt,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \sqrt{x}} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \left[z^{n+(1/2)} \frac{d^n}{dz^n} \left(z^n \frac{d^n}{dz^n} F(\sqrt{z}) z^{-1/4} \right) \right]_{z=(2n/e)^2} = \varphi(x).$$

校 后 記

林坚冰 等

这本书前七章主要介绍 L_1 和 L_2 两类函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换以及它们的 Stieltjes 积分形式的基本收敛定理、反演公式和一些基本性质，诸如跟微分运算的关系，跟 Hankel 变换和 Mellin 变换等最常见的积分变换的关系，关于结合式的 Parseval-Plancherel 定理等等。这些内容大体上构成关于这些变换的理论的最基本部分，也包括推导实用上的演算公式所必需的理论基础。叙述清晰，体裁也紧凑，对具备普通实函数论和复函数论知识的读者，这是一本适宜的读物。

最后一章扼要地介绍了 D. V. Widder 等人近年来发展的结合式变换的理论，直接取材于 I. I. Hirschman 和 Widder 的著作^[4]①，这就使得 Widder 的先后两部著作^[3]、^[4]对全书的影响特别明显。Widder 他们用结合式变换的概念总结了通常在微分方程的解法中使用的运算微积分方法，从而充分利用结合式的特点，在无限级微分运算的理论上得到了新的成果。这一部分材料对读者大概也不会没有兴趣。

不过，这些内容看来是不够满足多数读者的要求的。许多人所以对这些变换发生兴趣是由于这些变换在广泛的应用领域中能成为基本的分析工具。对于这些读者，问题通常在两方面：第一，

① 方括号里的数字指后面参考书目中的顺序号，下同。

怎样的数学問題适宜于应用这些变换求解？其次是应用这些变换的时候怎样进行演算？还有这些演算公式是怎样証明的？遺憾的是，在現有的关于这些变换的著作中，得到充分說明的时常只是后一問題，对前一問題没有应有的理論启发。本书也不能避免这个缺点。当然，作者对这一方面并不是完全不关心的，譬如在最后一章引用 Widder 对运算微积分的說明就是一个例子。关于这方面还应该特別提起[1]和[11]的作者所作的深入的分析，可是傳統的表达方式妨碍了他們采取更直接的途徑。此外，在抽象調和分析的領域中虽然有一些有关的理論概括，可是那些抽象的語言对初学者显然是过分生涩的。因此，下面除了向讀者推荐一些为了进一步研究所需要的参考书以外，特別就这問題做一些概括性的討論，希望对初学者能有所帮助。

二

Fourier 变换和 Laplace 变换是函数的两种特殊的綫性变换，要理解它們的本质最好是从函数的綫性变换的一般表示法考虑起。在这里，向量空間的綫性变换是我們良好的借鉴。

n 度复欧氏空間的綫性变换可以表示为方程組

$$(1) \quad \tilde{v}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i v^j \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

v^i 和 \tilde{v}^i 表示任何一个向量变换前后的分量， a_j^i 可以理解为原来第 j 个基底向量的象的第 i 个分量。在标准正交基底上，向量的分量不外是向量跟基底的数量积。

一个函数是由它在各点的函数值定义的。把这些函数值看做它的分量，那末一个函数跟另一个函数的共軛值的乘积的积分可以看作向量的內积的自然推广。所以，如果“函数空間”的基底記做 $\delta_a(x)$ ，那末一个函数 $u(x)$ 在 $x=a$ 的“分量”應該是

$$(2) \quad u(a) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{\delta_a(x)} dx,$$

这里我們假設 $u(x)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的某一类复函数。在这比拟下, 仿照 (1), 我們得到綫性变换的一般表示式

$$(3) \quad \tilde{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \tilde{\delta}_x(a) dx.$$

显然, 由于我們的要求, $\delta_a(x)$ 正是通常所謂 Dirac 函数。由 (3) 看到, 为了表达一个綫性变换, 全部任务就是寻求 $\delta_a(x)$ 的象。

(3) 的反演也可以仿照 (1) 的反演来实现。值得特別提起的是当 (1) 是酉 (复正交) 变换的时候, (1) 的反演是

$$(4) \quad v^i = \sum_{j=1}^n \bar{a}_i^j \tilde{v}^j \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

它跟 (1) 的联系是特別明显的。对函数变换来說, 复正交条件應該是

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}_a(x) \tilde{\delta}_b(x) dx = \delta_a(b).$$

因此仿照 (4), 当 (5) 成立的时候, (3) 的反演公式

$$(6) \quad u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(a) \overline{\tilde{\delta}_x(a)} da.$$

上面这些明显的关系式是我們討論 Fourier 变换和 Laplace 变换的意义的基础。

三

在什么情况下需要运用 Laplace 变换呢? 我們先拿运算微积分作为例子来说明。运算微积分的基本思想是把微分运算当做乘法看, 然后把代数方法应用到由 $\frac{d}{dx}$ 組成的多項式上, 最后把某些綫性微分方程的解法“代数化”。但是使 $\frac{d}{dx} u = \lambda u$ 成立的 u 只有 $ce^{\lambda x}$ 。因此我們希望借助于某种变换 $u \rightarrow \tilde{u}$ 使这个“乘法化”

的过程能够变相地完成,即要求 u 与 u' 經变换后滿足方程

$$(6) \quad \tilde{u}' = \lambda \tilde{u}.$$

在代数运算的自然要求下, λ 和 \tilde{u} 都應該是复数。又为了能够限制在比較简单的单变数的情形,我們自然希望 λ 和 \tilde{u} 的数值能决定于同一个参数,因此 \tilde{u} 是 λ 的函数。此外,由于处理的是綫性微分方程,当然也要求 $u \rightarrow \tilde{u}$ 的变换是綫性的。这种变换應該怎样表示,或者說(3)里的 δ_x 應該是什么呢?

特別对于 δ_x , (6) 这个条件成为 $\lambda \delta_x(\lambda) = \delta'_x(\lambda)$ (δ'_x 表示 $\frac{\partial \delta_x(y)}{\partial y}$ 經变换后的象), 因此根据(3)經過分部积分就得到

$$\begin{aligned} \lambda \delta_x(\lambda) &= \delta'_x(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_x(a) \tilde{\delta}_a(\lambda) da \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_x(a) \frac{\partial \tilde{\delta}_a(\lambda)}{\partial a} da = - \frac{\partial \tilde{\delta}_x(\lambda)}{\partial x}. \end{aligned}$$

比較这方程的最左和最右端的式子得到

$$\tilde{\delta}_x(\lambda) = c(\lambda) e^{-\lambda x},$$

于是所需要的变换必須是

$$(7) \quad \tilde{u}(\lambda) = c(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-\lambda x} dx,$$

而且为了(6)成立,还得限制 $u(-\infty) = 0$, $u(\infty) = 0$. 当然这样的边界条件甚至在要求有关的积分存在的时候就已經需要了。

为了简单,不妨取 $c(\lambda) = 1$, 于是(7)正是双边的 Laplace 变换。在不同的边界条件 $u(x) = 0$ ($x \in (a, b)$) 下, 这变做区間 (a, b) 上的 Laplace 变换

$$(8) \quad \tilde{u}(\lambda) = \int_a^b u(x) e^{-\lambda x} dx.$$

当 $a=0$, $b=\infty$ 的时候, (8) 就是通常的 Laplace 变换。

从上面可以看出,正是运算微积分的基本原理决定了 Laplace 变换的形式。

再考察一下反演的问题。为了反演的方便我們自然寻求酉变换。由(4)知道(7)成为酉变换的条件是

$$c(a)\overline{c(b)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax}\overline{e^{-bx}}dx=\delta_a(b).$$

显然,如果 a 和 b 不都是純虛数,这方程不能成立。但当 a 和 b 都是純虛数,而且 $c(a)=c(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 时,則可以利用 $\delta_a(x)$ 的定义(2)来証明这个事实,詳細演算这里不再进行。这样,所求的酉变换成为

$$(9) \quad \tilde{u}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{-i\lambda x}dx, \quad \lambda \geq 0,$$

这就是 Fourier 变换。酉变换在反演問題上的特殊意义造成了 Fourier 变换在 Laplace 变换的理論中的特殊地位。

四

把綫性运算“乘法化”其实并不限于前面所說的微分运算。譬如,应用关于某一个变数的 Laplace 变换把偏微分运算化为常微分运算显然是根据同一原理的。在解偏微分方程的时候我們也常用分离变数法,对于某些边界問題它可以用 Fourier 級数的展开来实现,这包含着同样的思想。事实上,近代的 Haar 积分的概念已經直接把这这里所用的积分和級数的概念在严格的邏輯基础上統一起来了(可以参考[17])。

利用分离变数法在圓柱坐标下解 Laplace 方程引起 Bessel 方程的求解問題。这里也需要把一个綫性微分运算“乘法化”。用类似于前一段的办法,我們可以說明 Hankel 变换正是实现这个目的的天然工具。类似的原理也可以說明 Mellin 变换和 Legendré 变换等等在数学物理中产生的根源。

解波动方程中的特征函数法也是一个可以应用类似方式加以

考察的例子。在这里出現的方程 $\Delta u = \lambda u$ 的求解問題事实上就是 Laplace 运算“乘法化”的問題。所以多变数的 Fourier 变换在这种情况下出現就很自然了。

在数学物理中,綫性变换的运用还有另外的方式,比方可以把 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 直接理解做 $u \rightarrow f$ 的一个綫性变换。解这方程事实上就是求这变换的反演。利用多变数的 Dirac 函数的概念,这反演自然可以表示成

$$u(P) = \iiint_{\infty} f(Q) \Delta^{-1} \delta_Q(P) dV,$$

而 $\Delta^{-1} \delta_Q(P)$ 就是通常的 Green 函数。这样我們得到“基本解”方法。

上面的这些例子說明了积分变换的实质。Laplace 变换的特殊意义在于它所对应的运算是最基本的微分运算。

五

除了数学物理的問題以外,另一类牵涉到 Laplace 变换和 Fourier 变换的数学問題是跟結合式的运算有关的。这类問題的主要来源是概率論和有关的技术科学,因为两个随机变数的和的概率分布是它們的概率分布的結合式。为了解决这类問題,通常又是把結合式的运算“乘法化”,因此也要应用綫性变换。

不用 Stieltjes 积分表示,結合式可以写做

$$(10) \quad c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

我們希望通过綫性变换 $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ 便

$$(11) \quad \tilde{c}(P) = \tilde{f}(P) \tilde{g}(P).$$

我們来推求在滿足上述要求的变换下的 $\tilde{\delta}_x$ 。利用(11)可以推出关系式:

$$(12) \quad \delta_{x+y}(P) = \delta_x(P) \delta_y(P).$$

这就决定了 $\delta_x(P) = e^{c(P)x}$. 适当选择变数, 可以写成

$$\delta_x(P) = e^{-Px}.$$

这样又得到 Laplace 变换, 为了反演方便起见, 我们自然时常应用 Fourier 变换 (9)。这就是特征函数变成概率论中常用的概念的根源。

六

对 Laplace 变换和 Fourier 变换本质的解释大体如上。至于关于这些变换的更进一步的知識可以从下面开列的著作中找到。比方叙述一般 Tauber 定理和应用的有 [3], [6], 叙述一般調和分析和几乎周期函数的有 [1], [6], 其余可参考下面所作的簡短說明。目录中还包括了一些属于其他領域的书本, 因为調和分析也正象其他許多分支一样, 是一門不能仅仅在它自己的領域内来認識它的全部意义的学科。

参考书 [1] ~ [4] 是四本适宜的讀物: [1] 的特点上面提过, [2] 写得非常簡洁, 并且特別注意到跟多变数理論的联系。[3], [4] 是本书許多材料的来源。有些比較高深的討論, 例如一般 Tauber 定理和应用, 矩問題等等, 是本书所未收罗的。此外, 还有某些古典的結果見于出版較早的著作 [5] ~ [8]。其中 [6] 的内容大体上見于前面四书, [5], [7], [8] 特別詳細叙述在复变数分析上的应用。[5] 搜集了許多历史性的成果, 而 [7], [8] 則主要是介紹作者們的工作。除了这些讀物以外, 手册 [9] 全面地总結了 Laplace 变换理論方面的成果, 并附有詳細的文献目录, 值得参考。同一作者的著作 [10] 是它的补充讀物。

关于应用方面, 国内出版的譯本值得推荐的有 [11] ~ [13]。[11] 是一本論述深刻、内容丰富的好书, [12], [13] 則以簡洁見长。

介紹原始形态的 Heaviside 方法的有[14],至于特別論述 Fourier 变换在概率論和有关的技术科学方面应用的专著則有[15], [16]。

关于抽象調和分析的有[17]。[17] 綜合地介紹了 Гельфанд 理論出現以后的有关成果,內容簡洁。[18] 和 [19] 是新近出版的調和分析方面的文献汇编,在一定程度上反映了这方面的理論的现代成就。最后不能不提起广义函数論和調和分析的密切关系,这从上面所說的 Dirac 函数在綫性变换理論中的重大作用可以看出来。[20] ~ [22] 是广义函数論方面的专著, [22] 特別詳細地討論了調和分析。

参 考 书

一、基本理論方面

- [1] E. C. Titchmarsh: An introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford, 1948.
- [2] S. Bochner and K. Chandrasekharan: 傅立叶变式, 何旭初譯, 叶彦謙校, 高等教育出版社, 1952.
- [3] D. V. Widder: The Laplace transform, Princeton, 1946.
- [4] I. I. Hirschman and D. V. Widder: The convolution transform, Princeton, 1955.
- [5] S. Bochner: Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.
- [6] N. Wiener: The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.
- [7] R. E. A. C. Paley and N. Wiener: Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.
- [8] T. Carleman: Integrale de Fourier, Uppsala, 1944.
- [9] G. Doetsch: Handbuch der Laplace-Transformation, I(1950), II (1955), III(1956), Basel.
- [10] G. Doetsch: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Basel, 1958.

二、应用方面

- [11] I. N. Sneddon: 富利叶变换, 何衍璿、張 燮譯, 科学出版社, 1958.
- [12] C. J. Tranter: 数学物理中的积分变换, 潘德惠譯, 高等教育出版社, 1959.
- [13] М. И. Конторович: 运算微积分学和电路中的不稳定现象, 胡汝鼎、謝克寬譯, 上海科学技术出版社, 1956.
- [14] E. J. Berg: Heaviside's operational calculus, New York, 1929.
- [15] N. Wiener: Extrapolation, interpolation and smoothing of time series, Cambridge Mass., 1950.
- [16] S. Bochner: Harmonic analysis and the theory of probability, 1955.

三、調和分析的現代理論方面

- [17] L. H. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis, New York, 1953.
- [18] Analyse Harmonique, Coll. Internationaux du CNRS., Paris, 1949.
- [19] A. Zygmund etc: Contributions to Fourier analysis, Ann. Math. Studies 25, Princeton, 1950.
- [20] 馮康: 广义函数論, 科学进展, 1(1955), 405~590. 特別其中的第七章.
- [21] L. Schwartz: Théorie des distributions, II, 1951. 特別其中的第七章.
- [22] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов: Обобщённые функции и действия над ними, I (1958), II, III (1959), Москва.